Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша.
Академии Наук СССР

Ю.И. Янов.

НЕСКОЛЬКО ТЕОРЕМ О СВЕРТКАХ

Препринт № 95 за 1978 г.

Москва.

О Р Д Е Н А Л Е Н И Н А

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ М.В.КЕЛДЫША

АКАДЕМИИ НАУК СССР

Ю.И. ЯНОВ

НЕСКОЛЬКО ТЕОРЕМ О СВЕРТКАХ

Москва 1978

В работе рассматриваются три типа сверточных операций и доказываются теоремы о сохранении ими определенных отношений на множестве диаграмм. Приведены примеры построения конечных сверток для вычислительных деревьев машин Тьюринга.

Three types of convolution operations are considered. It is proved that these operations preserve certain relations on the set of diagrams. Examples of construction of finite convolutions for calculating trees of Turing machines are given.

0. Введение

Метод сверток, изложенный в работах [1] и [2], можно развивать, по крайней мере, по двум направлениям: во-первых, путем использования новых бинарных отношений на множестве диаграмм, с помощью которых получаются свертки и, во-вторых, путем усиления самих операций свертки. В настоящей работе, кроме Φ-свертки, определяются операции KI_f-свертки, где f – бинарное отношение на множестве $A^{\circledast}$ слов и сверхслов в алфавите A, а также – $Z\Phi$-свертки, где Φ – бинарное отношение на множестве диаграмм. Операция KI_f-свертки более сильная, чем операция I'_f-свертки, однако в случае, когда f – побуквенное отношение, замкнутое относительно предельного перехода, KI_f-свертка произвольной диаграммы находится с ней в отношении I'_f (теорема 4). $Z\Phi$-свертки включают, как частный случай, так называемые свертки по ветвям [2], поэтому для некоторого подкласса таких операций любая диаграмма имеет конечную свертку (теорема 5)

Применение операций KI_f-свертки демонстрируется на вычислительных деревьях машин Тьюринга, выполняющих умножение чисел в унарной системе и перевод чисел из унарной системы в двоичную. Для вычислительных деревьев этих машин получены конечные KI_h-свертки, где h – специальное побуквенное отношение.

Поскольку оказалось целесообразным изменить некоторые понятия, введенные в работах [1] и [2] (сохранив первоначальную терминологию), то в настоящей работе даются новые определения ряда понятий. В частности, расширено понятие Φ-свертки, что делает его более гибким и увеличивает возможности приложений. Расширены также понятия побуквенного отношения, отношения h и отношения I_f . В связи с этим дано новое доказательство теоремы об устойчивости отношений I_f , Ψ_f , Ω_f , I'_f , Ψ'_f , Ω'_f , где f - произвольное побуквенное отношение, замкнутое относительно предельного перехода (теорема 3). Понятие замкнутости побуквенного отношения относительно предельного перехода явно определяется впервые в настоящей работе (в работах [I] и [2] оно используется неявно). Поскольку это свойство существенно для приложений, в частности для указанной теоремы, то приводится достаточное условие замкнутости относительно предельного перехода произвольного побуквенного отношения (теорема 2). Согласно этому условию, например, отношение h является замкнутым. Так как новое понятие отношения h является более широким, чем введенное ранее, то содержащееся в работе [2] доказательство теоремы о существовании конечного h-базиса у произвольного множества слов и сверхслов может служить доказательством и для измененного отношения, поэтому новое доказательство здесь не приводится.

В связи с изменением понятия Φ-свертки несколько изменился и критерий существования конечной свертки, поэтому мы приводим его с полным доказательством (теорема I).

I. Φ-свертки.

Как и в [2], будем называть диаграммой связной ориентированный граф, у которого выделена некоторая вершина, называемая корнем и обладающая тем свойством, что из нее существует (ориентированный) путь в любую другую вершину или, другими словами, любая вершина, отличная от корня, является его последователем.

Если v - вершина диаграммы $\mathcal{D}$, то полная поддиаграмма $\mathcal{D}_v$ диаграммы $\mathcal{D}$ - это поддиаграмма с корнем v, содержащая все последователи вершины v в $\mathcal{D}$ и только их (не считая v).

Поддиаграмма $\mathcal{D}_1$ диаграммы $\mathcal{D}$ называется висячей, если она отлична от $\mathcal{D}$ и из вершин, не принадлежащих $\mathcal{D}_1$, не ведут дуги ни в одну из вершин поддиаграммы $\mathcal{D}_1$, кроме ее корня.

Полное поддерево диаграммы $\mathcal{D}$ - это висячая полная поддиаграмма, являющаяся деревом.

Пусть имеется диаграмма $\mathcal{D}$ и бинарное отношение Φ на множестве диаграмм. Предположим, что для некоторых полных поддиаграмм $\mathcal{D}_v, \mathcal{D}_u$ диаграммы $\mathcal{D}$ выполняются следующие условия:

1. поддиаграмма $\mathcal{D}_v$ - висячая;
2. вершина u не является последователем вершины v и не совпадает с ней;
3. $\mathcal{D}_v \Phi \mathcal{D}_u$.

Тогда Φ-сверточным шагом в применении к поддиаграммам $\mathcal{D}_v$, $\mathcal{D}_u$ назовем следующую операцию преобразования диаграммы $\mathcal{D}$: удаляем поддиаграмму $\mathcal{D}_v$ и все дуги, которые вели в ее корень v, направляем в корень u поддиаграммы $\mathcal{D}_u$.

Если диаграмма $\mathcal{D}_1$ получена из диаграммы $\mathcal{D}$ с помощью одного Φ-сверточного шага, то обозначим: $\mathcal{D} \overset{\Phi}{\underset{1}{\succ}} \mathcal{D}_1$. Транзитивное замыкание отношения $\overset{\Phi}{\underset{1}{\succ}}$ обозначим через $\overset{\Phi}{\succ}$. Отношения $\overset{\Phi}{\underset{1}{\succ}}$ и $\overset{\Phi}{\succ}$ будем называть отношениями Φ-свертки или Φ-сверточными отношениями.

Если $\mathcal{D} \overset{\Phi}{\succ} \mathcal{D}'$, то диаграмму $\mathcal{D}'$ назовем Φ-сверткой диаграммы $\mathcal{D}$ (или просто сверткой, если ясно, о каком отношении Φ идет речь) и будем обозначать ее иногда через $\mathcal{D}^{\Phi}$.

Последовательность диаграмм $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, ... такую, что $\mathcal{D}_0 \overset{\Phi}{\underset{1}{\succ}} \mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_1 \overset{\Phi}{\underset{1}{\succ}} \mathcal{D}_2$ ..., назовем Φ-сверточной последовательностью для диаграммы $\mathcal{D}_0$.

Очевидно, что если свойство быть висячей поддиаграммой рекурсивно (это выполняется, например, для деревьев) и отношение Φ рекурсивно, то существует алгоритм, дающий конечную Φ-свертку для всех тех диаграмм, для которых конечная Φ-свертка существует.

Дадим один критерий существования конечных Φ-сверток для бесконечных диаграмм.

Множество V вершин диаграммы $\mathcal{D}$ назовем сечением, если любая бесконечная простая (т.е. без циклов) ветвь диаграммы $\mathcal{D}$ содержит хотя бы одну вершину из V.

Если V - некоторое множество вершин диаграммы $\mathcal{D}$, то обозначим через $\overline{\mathcal{D}}_V$ диаграмму, которая получается из $\mathcal{D}$ удалением всех полных поддиаграмм $\mathcal{D}_v$, где $v \in V$ (причем удаляются и образующиеся висячие дуги).

<u>Теорема I</u>. Пусть Φ устойчивое[1] транзитивное бинарное отношение на множестве диаграмм, и пусть $\mathcal{D}$ - бесконечная диаграмма. Для существования конечной Φ-свертки $\mathcal{D}^{\Phi}$ необходимо и достаточно, чтобы в $\mathcal{D}$ нашлось конечное сечение V, удовлетворяющее следующим двум условиям:

(I) для любой вершины v из V поддиаграмма $\mathcal{D}_v$ висячая и

(2) для любой вершины v из V в диаграмме $\overline{\mathcal{D}}_V$ найдется такая вершина v', что $\mathcal{D}_v \Phi \mathcal{D}_{v'}$.

---

1) т.е. Φ сохраняется Φ-сверточными операциями (см. стр. 15).

Необходимость. Пусть существует конечная Φ-свертка $\mathcal{D}^{\Phi}$ бесконечной диаграммы $\mathcal{D}$, и пусть $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1, \ldots, \ldots \mathcal{D}_n = \mathcal{D}^{\Phi}$ – соответствующая Φ-сверточная последовательность, где на $i+1$-м сверточном шаге (т.е. при переходе от $\mathcal{D}_i$ к $\mathcal{D}_{i+1}$) отбрасывается висячая поддиаграмма $\mathcal{D}_{v_i}$, $i = 0,1,\ldots, n-1$. Поскольку конечная диаграмма не содержит бесконечных простых ветвей, то для любой бесконечной простой ветви w диаграммы $\mathcal{D}$ существует i, $0 \leqslant i < n$, такое, что некоторый бесконечный отрезок ветви w содержится в $\mathcal{D}_{v_i}$. А так как поддиаграмма $\mathcal{D}_{v_i}$ висячая, то ветвь w должна проходить через вершину v_i. Таким образом, множество $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ является сечением диаграммы $\mathcal{D}$, удовлетворяющим условию (I).

Покажем, что выполняется и условие (2). Пусть $i+1$-й сверточный шаг применяется к поддиаграммам $\mathcal{D}_{v_i}, \mathcal{D}_{v_i'}$ диаграммы $\mathcal{D}_i$, и следовательно, $\mathcal{D}_{v_i} \Phi \mathcal{D}_{v_i'}$, $i = 0,1,\ldots,n-1$. Если бы вершина v_i' лежала внутри некоторой поддиаграммы $\mathcal{D}_{v_j}$, где $i<j<n$ (поддиаграмм $\mathcal{D}_{v_0}, \ldots, \mathcal{D}_{v_{i-1}}$ в диаграмме $\mathcal{D}_{v_j}$ уже нет), то в диаграммах $\mathcal{D}_{i+1}, \ldots, \mathcal{D}_j$ поддиаграмма $\mathcal{D}_j$ не была бы висячей и к ней нельзя было бы применить Φ-сверточный шаг. Поэтому вершина v_i' принадлежит либо поддиаграмме $\overline{\mathcal{D}}_V$, либо сечению V. В первом случае условие (2) выполнено. Предположим, что v_i' совпадает с некоторой вершиной v_j из V, где $j>i$ (j не может быть меньше i, поскольку вершины $v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}$ в $\mathcal{D}_i$ не содержатся). По определению множества V существует вершина v_j', такая, что $\mathcal{D}_{v_j} \Phi \mathcal{D}_{v_j'}$, причем v_j' принадлежит либо поддиаграмме $\overline{\mathcal{D}}_V$, либо множеству V. Если вершина v_j' принадлежит $\overline{\mathcal{D}}_V$, то условие (2) выполнено, поскольку $\mathcal{D}_{v_i} \Phi \mathcal{D}_{v_j'}$ в силу транзитивности отношения Φ. Если же $v_j' \in V$, то повторив предыдущее рассуждение, мы либо обнаружим выполнение условия (2), либо получим еще одну вершину v_k из множества V такую, что $\mathcal{D}_{v_i} \Phi \mathcal{D}_{v_k}$, причем $k > j > i$. Так как множество V конечно, то этот процесс должен закончится тем, что для некоторой вершины v_m из V, где $m \geqslant k > j > i$, существует вершина v_m' из $\overline{\mathcal{D}}_V$ такая, что $\mathcal{D}_{v_m} \Phi \mathcal{D}_{v_m'}$, причем $\mathcal{D}_{v_i} \Phi \mathcal{D}_{v_m}$. В силу транзитивности отношения Φ тогда $\mathcal{D}_{v_i} \Phi \mathcal{D}_{v_m'}$, и следовательно условие (2) выполнено.

Достаточность. Предположим, что V -конечное сечение диаграммы $\mathcal{D}$, удовлетворяющее условиям (I) и (2). Мы можем считать, что сечение V минимально, т.е. при выбрасывании из него любой вершины оно перестает быть сечением. Тогда очевидно, что никакие две вершины из V не принадлежат одной ветви, ибо в противном случае в силу свойства (I) ту из этих вершин, которая является последователем другой, можно выкинуть из V, не нарушив свойства V быть сечением. В силу условий (I) и (2) тогда мы можем применить Φ-сверточные шаги ко всем поддиаграммам $\mathcal{D}_v$, где $v \in V$. В результате мы получим Φ-свертку $\mathcal{D}^\Phi$, которая не содержит бесконечных простых ветвей, ибо всякая такая ветвь в диаграмме $\mathcal{D}$ проходит через некоторую вершину из V. Но это означает, что свертка $\mathcal{D}^\Phi$ конечна. $\downarrow$

Если Φ - бинарное отношение на некотором множестве $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$, то подмножество $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ называется Φ-базисом множества $\mathfrak{A}$, если $\Phi^{-1}\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$, т.е. для всякого α из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ найдется такой элемент β, что $\alpha \Phi \beta$.

В качестве следствия из теоремы I для транзитивного отношения Φ на множестве диаграмм и для произвольного дерева получаем.

Предложение I. Если множество всех полных преддеревьев дерева $\mathfrak{D}$ имеет конечный Φ- базис, то существует конечная Φ- свертка $\mathfrak{D}^{\Phi}$.

2. Побуквенные отношения

Если $\mathbf{A}$ - произвольный алфавит, k - положительное натуральное число, то $\mathbf{A}, k$ -диаграммой называется такая диаграмма, что:
I) каждой ее вершине v приписана буква $\mathbf{A} v$ из алфавита $\mathbf{A}$;
2) положительная степень любой вершины не превосходит k и
3) всем дугам, выходящим из одной вершины, взаимнооднозначно приписаны буквы алфавита $\text{Б}_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Дуга, которой приписана буква a из Б_k, называется a-дугой.

Для каждого бинарного отношения f на множестве $A^{\bullet} = A^{*} \cup A^{\infty}$ всех слов и сверхслов в алфавите $\mathbf{A}$ мы определим шесть бинарных отношений I_f, I_f', Ψ_f, Ψ_f', Ω_f, Ω_f' на множестве всех $\mathbf{A}, k$ -диаграмм следующим образом [I].

I) Определяемые здесь отношения I_f и I_f' шире одноименных отношений работы [2]. Отношения Ψ_f, Ψ_f', Ω_f и Ω_f' - такие же, как и в [2].

Функцию φ, отображающую множество $W\mathcal{D}_1$ всех ветвей диаграммы $\mathcal{D}_1$ на (в) множество $W\mathcal{D}_2$ всех ветвей диаграммы $\mathcal{D}_2$ назовем сильнооднозначной, если для произвольных ветвей $w_1 = v_0 d_0 v_1 d_1 \ldots$ и $w_2 = v_0' d_0' v_1' d_1' \ldots$ диаграммы $\mathcal{D}_1$ таких, что для некоторого $m \geqslant 0$: $d_m \neq d_m'$, значения $\varphi w_1 = u_0 c_0 u_1 c_1 \ldots$ ... и $\varphi w_2 = u_0' c_0' u_1' c_1' \ldots$ таковы, что для некоторого $n \leqslant m$: $c_n \neq c_n'$.

Если $w = v_0 d_0 v_1 d_1 \ldots$ – какой-либо путь в некоторой $\mathbf{A},k$-диаграмме, то обозначим через $\mathbf{A}w$ последовательность $\mathbf{A}v_0 \mathbf{A}v_1 \ldots$ букв алфавита $\mathbf{A}$, приписанных вершинам пути w.

Для произвольных $\mathbf{A},k$-диаграмм $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ полагаем:

1. $\mathcal{D}_1 I_f \mathcal{D}_2$ ($\mathcal{D}_1 I_f' \mathcal{D}_2$) тогда и только тогда, когда существует сильнооднозначная функция φ, отображающая множество $W\mathcal{D}_1$ на (в) множество $W\mathcal{D}_2$ так, что для любой ветви w из $W\mathcal{D}_1$ выполняется отношение $\mathbf{A}w f \mathbf{A}\varphi w$.

2. $\mathcal{D}_1 \Psi_f \mathcal{D}_2$ ($\mathcal{D}_1 \Psi_f' \mathcal{D}_2$) тогда и только тогда, когда существует функция φ, отображающая $W\mathcal{D}_1$ на (в) $W\mathcal{D}_2$ так, что для любой ветви w из $W\mathcal{D}_1$ выполняется отношение $\mathbf{A}w f \mathbf{A}\varphi w$.

3. $\mathcal{D}_1 \Omega_f \mathcal{D}_2$ ($\mathcal{D}_1 \Omega_f' \mathcal{D}_2$) тогда и только тогда, когда существует отношение $\varphi \subseteq W\mathcal{D}_1 \times W\mathcal{D}_2$ такое, что $\varphi W\mathcal{D}_1 = W\mathcal{D}_2$ ($\varphi W\mathcal{D}_1 \subseteq W\mathcal{D}_2$), причем для любой ветви w из $W\mathcal{D}_1$: $\varphi w \neq \varnothing$ (т.е. φ – многозначная функция, отображающая множество $W\mathcal{D}_1$ на (в) множество $W\mathcal{D}_2$), и для любого w' из φw выполняется отношение: $\mathbf{A}w f \mathbf{A}w'$.

Очевидно, что $I_f \subseteq \Psi_f \subseteq \Omega_f$ и $I_f' \subseteq \Psi_f' \subseteq \Omega_f'$.

Очевидно также, что если отношение f транзитивно, то транзитивны и отношения I_f, I'_f, Ψ_f, Ψ'_f, Ω_f, Ω'_f.

Важный в прикладном аспекте подкласс бинарных отношений на множестве $A^{\circledast}$ образуют так называемые побуквенные отношения, которые мы определим следующим образом.

Пусть N (N') обозначает множество всех (положительных) натуральных чисел, $N'_m = \{1, 2, \ldots m\}$, $N'_\infty = N'$. Для произвольного α из $A^{\circledast}$ обозначим: $l\alpha$ – длина слова α, если $\alpha \in A^*$, и $l\alpha = \infty$, если $\alpha \in A^\infty$. Для всякого натурального числа i такого, что $1 \leq i \leq l\alpha$, будем обозначать через $\alpha[i]$ i-ую по порядку букву (сверх-)слова α; $\alpha[1,i]$ – это начало длины i (сверх-)слова α, т.е. $\alpha[1,i] = \alpha[1]\alpha[2]\ldots\alpha[i]$.

Бинарное отношение f на множестве $A^{\circledast}$ назовем побуквенным, если оно удовлетворяет следующим условиям [I]:

(f I) Если $\alpha f \beta$, то

(f I.I) $\alpha, \beta \in A^*$ или $\alpha, \beta \in A^\infty$ и

(f I.2) существует функция ν, отображающая $N'_{l\alpha}$ на $N'_{l\beta}$ такая, что для любого i из $N'_{l\alpha}$ выполняется равенство (fa): $\alpha[i] = \beta[\nu i]$.

[I] Определяемое здесь понятие побуквенного отношения отличается от одноименного понятия, используемого в работах [I] и [2], отсутствием требования конечности прообраза $\nu^{-1} i$. Кроме того, в работах [I] и [2] неявно подразумевается замкнутость побуквенных отношений относительно предельного перехода (см. ниже).

(f 2) Если $\alpha f \beta$ и $\gamma f \delta$, то $\alpha\gamma f \beta\delta$.

(f 3) Отношение f рефлексивно и транзитивно.

Функцию ν из условия (f I.2) будем называть функцией, осуществляющей отношение $\alpha f \beta$.

Примерами побуквенных отношений на множестве $A^{\circledast}$ являются диагональное (тождественное) отношение $f_0 = \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in A^{\circledast}\}$, а также отношение f_1 такое, что для произвольных α, β из $A^{\circledast}$ $\alpha f \beta$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (f I.I) и (f I.2). Нетрудно убедиться, что отношение f_1 удовлетворяет условиям (f 2) и (f 3), и следовательно, является побуквенным.

В классе всех побуквенных отношений на множестве $A^{\circledast}$ отношения f_0 и f_1 являются, соответственно, наименьшим и наибольшим по включению.

Побуквенное отношение f называется отношением без предвосхищения, если для любых α, β таких, что $\alpha f \beta$, это отношение осуществляется функцией ν, удовлетворяющей условию: для любого i : $\nu i \leqslant i$ $(1 \leqslant i \leqslant \ell\alpha)$.

Среди таких отношений важную роль играет отношение h, которое удобно применять при получении конечных сверток вычислительных деревьев (см. примеры в разделе 6). Мы определим его следующим образом [I)].

I) Как и для произвольного побуквенного отношения это понятие отношения h является более широким, чем в работах [I] и [2].

Для произвольных α, β из $A^{\circledast}$ полагаем: $\alpha h \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha, \beta \in A^*$ или $\alpha, \beta \in A^{\infty}$ и существует функция ν, отображающая множество $N'_{\ell\alpha}$ на множество $N'_{\ell\beta}$ и удовлетворяющая для любого i такого, что $1 \leqslant i \leqslant \ell\alpha$, следующим условиям:

(h I) $\alpha[i] = \beta[\nu i]$;

(h 2) если $\nu i > 1$ и $1 \leqslant m < \nu i$, то существует $n < i$ такое, что $\nu n = m$;

(h 3) если $\alpha \in A^*$, то $\nu \ell\alpha = \ell\beta$.

Нетрудно убедиться, что отношение h является побуквенным отношением без предвосхищения, причем на множестве A^* это отношение рекурсивно.

Существенная особенность отношения h состоит в том, что любое подмножество множества $A^{\circledast}$ имеет конечный h-базис (доказательство см. в работе [2]). Другое важное свойство этого отношения - замкнутость относительно предельного перехода следует из приводимой ниже теоремы 2. Сначала определим это понятие

Пусть $p : N \mapsto N'$ - монотонно возрастающая арифметическая функция, определенная на всем множестве N. Мы скажем, что последовательность сверхслов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ (I) p- сходится к сверхслову α, что обозначим: $\alpha_n \xrightarrow[p]{} \alpha$, если для любого натурального числа n : $\alpha_n[1, p(n)] = \alpha[1, p(n)]$.

Обозначим: $\alpha_n \xrightarrow[n]{} \alpha$, если существует функция p такая, что $\alpha_n \xrightarrow[p]{} \alpha$.

Будем говорить, что побуквенное отношение f замкнуто относительно предельного перехода, если выполняется следующее условие:

(f4) если $\alpha_n \to \alpha$ и $\forall n\ \alpha_0 f \alpha_n$, то $\alpha_0 f \alpha$

Пусть G – какое-либо свойство (частичных) арифметических функций. Мы скажем, что свойство G локально определимо, если для произвольной функции $\gamma : \mathcal{N}' \mapsto \mathcal{N}'$ $G(\gamma)$ тогда и только тогда, когда существует монотонно возрастающая функция p такая, что для любого n: $G(\gamma | \mathcal{N}'_{p(n)})$, где $\gamma | \mathcal{N}'_{p(n)}$ – ограничение функции γ на множестве $\mathcal{N}'_{p(n)}$.

Примером локально определимого свойства является свойство $(h2)$ из определения отношения h, так что в силу следующей теоремы отношение h замкнуто относительно предельного перехода.

Теорема 2. Пусть f – побуквенное отношение без предвосхищения такое, что для произвольных сверхслов α, β отношение $\alpha f \beta$ выполняется тогда и только тогда, когда существует функция γ, осуществляющая это отношение без предвосхищения и обладающая некотррыми локально определимыми свойствами $G_1, \ldots, G_m$. Тогда отношение f замкнуто относительно предельного перехода.

Доказательство этой теоремы не содержит принципиальных трудностей, поэтому мы опишем только его схему. Пусть f удовлетворяет посылке теоремы. Предположим, что $\alpha_n \xrightarrow[p]{} \alpha$ и $\forall n\ \alpha_0 f \alpha_n$. Функции γ_n, осуществляющие отношения $\alpha_0 f \alpha_n$, можно перестроить в такие функции γ'_n, что для любого n функции γ'_n и γ'_{n+1} на множестве $\mathcal{N}'_{p(n)}$ совпадают и обладают свойствами $G_1, \ldots, G_m$. Тогда нужную функцию γ, осуществляющую отношение $\alpha_0 f \alpha$, можно определить как функцию, совпадающую на любом множестве $\mathcal{N}'_{p(n)}$ с функцией γ'_n.

Основное свойство побуквенных отношений, замкнутых относительно предельного перехода, состоит в том, что порождаемые ими отношения Φ_f, где $\Phi \in \{I, I', \Psi, \Psi', \Omega, \Omega'\}$, обладают определенной замкнутостью относительно Φ_f - сверточных шагов, что позволяет использовать эти отношения для разрешения свойств бесконечных A, k-диаграмм путем получения конечных Φ_f-сверток. Чтобы сформулировать этой свойство более точно, определим понятие устойчивости отношений.

Будем говорить, что бинарное отношение Φ устойчиво на множестве $\mathcal{V}$ диаграмм, если для любой диаграммы $\mathcal{D}$ из $\mathcal{V}$ и любой диаграммы $\mathcal{D}'$ такой, что $\mathcal{D} \overset{\Phi}{\underset{1}{\succ}} \mathcal{D}'$, выполняется условие: $\mathcal{D} \Phi \mathcal{D}'$. (Если множество $\mathcal{V}$ замкнуто относительно Φ-сверточных шагов, то устойчивость отношения Φ на множестве $\mathcal{V}$ эквивалентна тому, что $\overset{\Phi}{\underset{1}{\succ}} \subseteq \Phi$ на $\mathcal{V}$).

Ясно, что если отношение Φ транзитивно и устойчиво на множестве $\mathcal{V}$ диаграмм, то для любой Φ-свертки $\mathcal{D}^{\Phi}$ произвольной диаграммы $\mathcal{D}$ из $\mathcal{V}$ выполняется условие: $\mathcal{D} \Phi \mathcal{D}^{\Phi}$.

Докажем теперь основную теорему о побуквенных отношениях, замкнутых относительно предельного перехода.

<u>Теорема 3 [I)]</u>. Если f - побуквенное отношение на множестве $A^{\circledast}$, замкнутое относительно предельного перехода, то

I) Аналогичная теорема в работе [2] сформулирована в более сильной форме, а именно: все отношения I_f, Ψ_f, Ω_f, I'_f, Ψ'_f, Ω'_f устойчивы на множестве всех A, k-диаграмм. Однако, на самом деле, для отношений I_f и Ψ_f требуется ограничение, например такое, как в пункте б) настоящей теоремы. Отметим, что первого ограничения из пункта б) достаточно для того, чтобы теорема выполнялась для произвольных побуквенных отношений (т.е. не обязательно замкнутых относительно предельного перехода).

а) отношения Ω_f, I'_f, Ψ'_f, Ω'_f устойчивы на множестве всех $\mathbf{A},k$-диаграмм и

б) отношения I_f, Ψ_f устойчивы на множестве таких $\mathbf{A},k$-диаграмм, для которых Φ-сверточные шаги (где $\Phi\in\{I_f, \Psi_f\}$) применимы только к таким парам поддиаграмм $\mathcal{D}_v$, $\mathcal{D}_u$, что вершина v не является последователем вершины u, либо поддиаграмма $\mathcal{D}_u$ состоит из одной ветви (не считая условий 1–3 из определения Φ-сверточного шага).

↑ а) Пусть $\Phi\in\{\Omega_f, I'_f, \Psi'_f, \Omega'_f\}$, где f – побуквенное отношение на $\mathbf{A}^{\circledast}$, замкнутое относительно предельного перехода, и пусть $\mathcal{D}$ – произвольная $\mathbf{A},k$-диаграмма. Нам нужно доказать, что любая $\mathbf{A},k$-диаграмма $\mathcal{D}'$, полученная в результате применения к диаграмме $\mathcal{D}$ одного Φ-сверточного шага, удовлетворяет условию: $\mathcal{D}\Phi\mathcal{D}'$. Предположим, что $\mathcal{D}'$ получается из $\mathcal{D}$ применением Φ-сверточного шага к паре поддиаграмм $\mathcal{D}_v, \mathcal{D}_u$, т.е. удалением висячей поддиаграммы $\mathcal{D}_v$ и присоединением образовавшихся висячих дуг к вершине u. При этом поддиаграммы $\mathcal{D}_v$ и $\mathcal{D}_u$ (в диаграмме $\mathcal{D}$) удовлетворяют условию: $\mathcal{D}_v\Phi\mathcal{D}_u$.

Пусть φ – функция (многозначная функция, если $\Phi\in\{\Omega_f, \Omega'_f\}$), отображающая множество $W\mathcal{D}_v$ в множество $W\mathcal{D}_u$ (на множество $W\mathcal{D}_u$, если $\Phi=\Omega_f$) так, что для любой ветви w из $W\mathcal{D}_v$ выполняется условие: $\mathbf{A}w f \mathbf{A}\varphi w$ (в случае, когда функция φ многозначна, это означает, что для любой ветви w' из множества φw выполняется условие $\mathbf{A}w f \mathbf{A}w'$).

Покажем, что существует функция φ', отображающая множество $W\mathcal{D}$ всех ветвей диаграммы $\mathcal{D}$ в (на) множество $W\mathcal{D}'$ всех ветвей диаграммы $\mathcal{D}'$ так, что для любой ветви w диаграммы $\mathcal{D}$ выполняется условие (I): $\mathbf{A}w f \mathbf{A}\varphi' w$. При этом в случае, когда φ – многозначная функция, отображающая $W\mathcal{D}_v$ на $W\mathcal{D}_u$, функция φ' также многозначна и отображает $W\mathcal{D}$ на $W\mathcal{D}'$; если же функция φ сильнооднозначная, то и функция φ' сильнооднозначная.

Пусть w – произвольная ветвь диаграммы $\mathcal{D}$. Возможны следующие случаи.

I) Ветвь w не проходит через вершину v. Тогда, поскольку поддиаграмма $\mathcal{D}_v$ висячая, ветвь w не имеет с $\mathcal{D}_v$ общих вершин и потому целиком содержится в диаграмме $\mathcal{D}'$. Для таких ветвей w полагаем: $\varphi' w = w$. В силу рефлексивности побуквенных отношений в этом случае условие (I) выполнено.

2) Ветвь w проходит через вершину v. Пусть $w = y_0 d_0 t_0$, где y_0 – начальный путь в некоторую вершину v', непосредственно предшествующую вершине v (причем путь y_0 не проходит через вершину v и потому содержится и в диаграмме $\mathcal{D}'$), d_0 – дуга, ведущая из вершины v' в вершину v, t_0 – ветвь поддиаграммы $\mathcal{D}_v$. Обозначим: $t_0' = \varphi t_0$ ($t_0' \in \varphi t_0$), и следовательно (2): $\mathbf{A}t_0 f \mathbf{A}t_0'$. При этом, если функция φ многозначна, то мы проделываем описанные ниже рассмотрения для каждого элемента t_0' множества φt_0, так что получаемая в результате функция φ' также будет многозначной. Поскольку в этом состоит все отличие многозначного случая от однозначного, то в дальнейшем мы для простоты излагаем доказательство в терми-

нах однозначной функции φ и отмечаем лишь разницу в результатах.

По отношению к ветви t_0' также возможны два случая.

2.I) Ветвь t_0' не проходит через вершину v, и следовательно, она содержится в диаграмме $\mathcal{D}'$. Это означает, что в диаграмме $\mathcal{D}'$ имеется ветвь $w' = y_0 d_0' t_0'$. где d_0' - дуга, ведущая из вершины v' в вершину u. В этом случае полагаем: $\varphi' w = w'$ ($w' \in \varphi' w$), и тогда условие (I) будет выполнено в силу свойств (f 2) и (f 3) побуквенных отношений.

2.2) Ветвь t_0' поддиаграммы $\mathcal{D}_u$ в диаграмме $\mathcal{D}$ проходит через вершину v. Тогда t_0' можно представить в виде (3) : $t_0' = z_1 d_1 t_1$, где z_1 - путь из вершины u в некоторую вершину u_1, непосредственно предшествующую вершине v (причем путь z_1 не проходит через вершину v), d_1 - дуга, ведущая из вершины u_1 в вершину v; t_1 - ветвь поддиаграммы $\mathcal{D}_v$ (см. схематическое изображение на рисунке I, где совмещены обе диаграммы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$).

Обозначим: $t_1' = \varphi t_1$, так что (4) : $\mathbf{A} t_1 f \mathbf{A} t_1'$, и рассмотрим следующие случаи.

2.2.I) Ветвь t_1' поддиаграммы $\mathcal{D}_u$ в диаграмме $\mathcal{D}$ не проходит через вершину v и, следовательно, является ветвью поддиаграммы $\mathcal{D}_u$ в диаграмме $\mathcal{D}'$. Тогда, обозначив (5) : $y_1 = y_0 d_0' z_1$, как и в случае 2.I) полагаем: $\varphi' w = y_1 d_1' t_1'$, где d_1' - дуга, ведущая в диаграмме $\mathcal{D}'$ из вершины u_1 в вершину u. Поскольку $w = y_0 d_0 t_0$, то условие (I) будет выполнено в силу (2)-(5) и свойств (f 2), (f 3) побуквенных отношений.

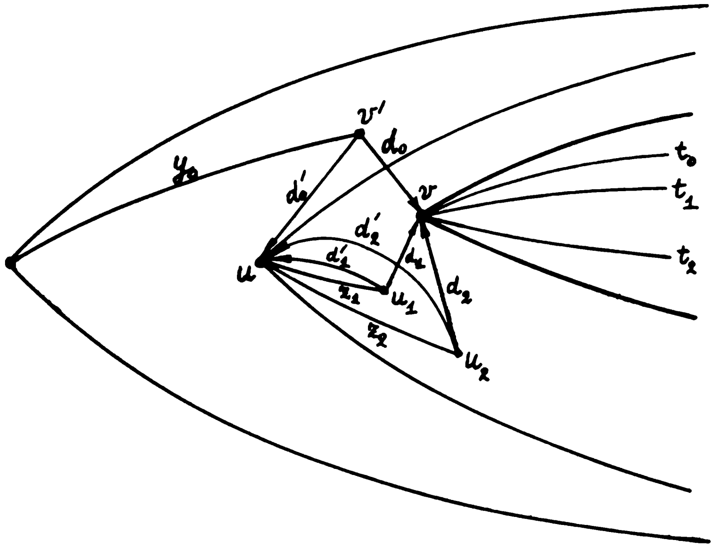


Рис.I.

2.2.2) Ветвь t_1' поддиаграммы $\mathcal{D}_u$ в диаграмме $\mathcal{D}$ проходит через вершину v, т.е. t_1' имеет вид $z_2 d_2 t_2$, где z_2 - путь из вершины u в некоторую вершину u_2, непосредственно предшествующую вершине v (причем путь z_2 не проходит через вершину v), d_2 - дуга, ведущая из вершины u_2 в вершину v, t_2 - ветвь поддиаграммы $\mathcal{D}_v$ (см. рис. I).

Обозначим: $y_2 = y_1 d_1' z_2$, $t_2' = \varphi t_2$, и в случае, если ветвь t_2' не проходит через вершину v, полагаем, аналогично случаю 2.2.I) : $\varphi' w = y_2 d'_2 t'_2$, где d'_2 - дуга, ведущая из вершины u_2 в вершину u . Условие (I) будет выполнено по тем же причинам, что и в случае 2.2.I).

Если ветвь t'_2 проходит через вершину v , то применяем рассуждения, описанные в этом пункте для ветви t'_1 , к ветви t'_2 и т.д. Этот процесс либо заканчивается построением нужной ветви $\varphi' w = y_n d'_n t'_n$, где $y_n = y_{n-1} d'_{n-1} z_n$ и $t'_n = \varphi t_n$, либо продолжается бесконечно. В последнем случае мы получаем в диаграмме $\mathcal{D}'$ бесконечную ветвь $w' = y_0 d'_0 z_1 d'_1 z_2 \ldots z_n d'_n \ldots$, которую и возьмем в качестве $\varphi' w$. Покажем, что она удовлетворяет условию (I).

Обозначим: $w_0 = w = y_0 d_0 t_0$, $w_{n+1} = y_0 d'_0 z_1 d'_1 \ldots \ldots z_{n+1} d_{n+1} t_{n+1} = y_{n+1} d_{n+1} t_{n+1}$, где $y_{n+1} = y_n d'_n z_{n+1}$. Отметим, что w_{n+1} не является ветвью диаграммы $\mathcal{D}$ или $\mathcal{D}'$, поскольку y_{n+1} - путь в диаграмме $\mathcal{D}'$, а дуга d_{n+1} и ветвь t_{n+1} поддиаграммы $\mathcal{D}_v$ не содержатся в диаграмме $\mathcal{D}'$; однако мы рассматриваем w_{n+1} как вспомогательную последовательность вершин и дуг обеих диаграмм $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$.

Поскольку $y_{n+1} = y_n d'_n z_{n+1}$, то $w_{n+1} = y_n d'_n z_{n+1} d_{n+1} t_{n+1}$, и следовательно, $\mathbf{A} w_n$ и $\mathbf{A} w_{n+1}$ имеют общее начало длины $p(n) = l y_n$. А так как для любого n : $w' = y_n d'_n \tau$, то $w_n \xrightarrow[p]{} w'$. Из определения ветвей w_0 , w_1 , ... непосредственно следует, что для любого натурального n : $\mathbf{A} w_n f \mathbf{A} w_{n+1}$, и следовательно, в силу транзитивности побуквенных отношений, $\mathbf{A} w_0 f \mathbf{A} w_n$. Поскольку отношение f замкнуто относительно предельного перехода и $w = w_0$, то $\mathbf{A} w f \mathbf{A} w'$. Таким образом, для случаев, когда $\Phi \in \{\Psi'_f, \Omega'_f\}$, теорема доказана.

Предположим, что φ - сильнооднозначная функция, отображающая WD_v в WD_u. Покажем, что построенная выше функция φ' сильнооднозначно отображает WD в WD'.

Пусть w_1 и w_2 - различные ветви диаграммы D. Если w_1 и w_2 отличаются дугами, не принадлежащими поддиаграмме D_v, то и их образы $\varphi' w_1$, $\varphi' w_1$ отличаются по крайней мере этими же дугами. Предположим, что они отличаются дугами (и, быть может, вершинами), входящими только в поддиаграмму D_v. Пусть $w_1 = y_0 d_0 t_{01}$, $w_2 = y_0 d_0 t_{02}$, где y_0 - начальный путь в некоторую вершину v', непосредственно предшествующую вершине v; d_0 - дуга, ведущая из вершины v' в вершину v; t_{01} и t_{02} - ветви поддиаграммы D_v, у которых m-ые (по порядку) дуги различны. Поскольку функция φ сильнооднозначна, то ветви φt_{01} и φt_{02} поддиаграммы D_u для некоторого $m_0 \leqslant m$ имеют различные m_0-ые дуги. Если эти дуги принадлежат разности $D_u - D_v$, то согласно определению функции φ' они входят и в ветви $\varphi' w_1$, $\varphi' w_2$, и следовательно, эти ветви отличаются не более далекими дугами, чем ветви w_1 и w_2.

Предположим, что $\varphi t_{01} = z_1 d_1 t_{11}$, $\varphi t_{02} = z_1 d_1 t_{12}$, где t_{11}, t_{12} - ветви поддиаграммы D_v. Эти ветви отличаются уже m_1-ми дугами, где $m_1 \leqslant m_0 - l z_1 - 1$, и следовательно, $m_1 < m_0$ (здесь $l z_1$ - число дуг в пути z_1). Таким образом, если процесс построения ветвей $\varphi' w_1$, $\varphi' w_2$ продолжается так, как это описано в пункте 2.2.2), то возможны два исхода: либо на некотором шаге по крайней мере одна из ветвей φt_{n1}, φt_{n2} будет целиком содержаться в разности $D_u - D_v$, и тогда ветви $\varphi' w_1, \varphi' w_2$ будут отличаться в соответствующем месте, либо для некоторого n ветви $\varphi t_{n1}, \varphi t_{n2}$ будут отличаться дугами, принадлежащими разности $\mathcal{D}_u - \mathcal{D}_v$, поскольку на каждом шаге уменьшается расстояние m_i до различных дуг: $m_1 < m_0$, $m_2 < m_1$ и т.д.

В последнем случае мы также получаем различные ветви $\varphi' w_1, \varphi' w_2$, отличающиеся не более далекими дугами, чем ветви w_1 и w_2.

Итак, для $\Phi = I'_f$ теорема доказана.

Докажем теперь, что в случае, когда функция φ отображает множество $W\mathcal{D}_v$ на множество $W\mathcal{D}_u$, значения определенной выше функции φ' можно расширить так, что она будет (многозначно) отображать множество $W\mathcal{D}$ на множество $W\mathcal{D}'$. Тем самым будет доказано, что отношение Ω_f устойчиво. Другими словами, нам надо доказать, что для любой ветви w' диаграммы $\mathcal{D}'$ в диаграмме $\mathcal{D}$ найдется ветвь w, удовлетворяющая условию (6) : $\Lambda w f \Lambda w'$.

Если ветвь w' совпадает с одной из ветвей w диаграммы $\mathcal{D}$, то утверждение тривиально.

Предположим, что w' не совпадает ни с одной из ветвей диаграммы $\mathcal{D}$. Пусть $w' = y_0 d'_0 t'_0$, где y_0 - максимальный начальный путь, содержащийся в диаграмме $\mathcal{D}$ и поэтому ведущий в некоторую вершину v', непосредственно предшествующую в диаграмме $\mathcal{D}$ вершине v; d'_0 - дуга, ведущая в диаграмме $\mathcal{D}'$ из вершины v' в вершину v (в диаграмме $\mathcal{D}$ этой дуге соответствует некоторая дуга d_0, ведущая из вершины v' в вершину v); t'_0 - ветвь поддиаграммы $\mathcal{D}_u$ в диаграмме $\mathcal{D}'$. Рассмотрим следующие случаи.

I) Ветвь t_0' поддиаграммы $\mathcal{D}_u$ диаграммы $\mathcal{D}'$ содержится в диаграмме $\mathcal{D}$, и следовательно, она не проходит в диаграмме $\mathcal{D}$ через вершину v. Поскольку функция φ отображает множество $W\mathcal{D}_v$ на множество $W\mathcal{D}_u$, то в поддиаграмме $\mathcal{D}_v$ существует ветвь t_0 такая, что $\varphi t_0 = t_0'$. А так как в диаграмме $\mathcal{D}$ имеется дуга d_0, ведущая из вершины v' в вершину v, то в $\mathcal{D}$ существует ветвь $w = y_0 d_0 t_0$. Для этой ветви условие (6) выполняется в силу свойств (f 2) и (f 3) побуквенных отношений.

2) Ветвь t_0' поддиаграммы $\mathcal{D}_u$ не содержится в диаграмме $\mathcal{D}$. Это означает, что t_0' имеет вид: $t_0' = z_1 d_1' t_1'$, где z_1 - начальный путь поддиаграммы $\mathcal{D}_u$, ведущий в некоторую вершину u_1, непосредственно предшествующую в диаграмме $\mathcal{D}$ вершине v, а в диаграмме $\mathcal{D}'$ - вершине u; d_1' - дуга, ведущая в диаграмме $\mathcal{D}'$ из вершины u_1 в вершину u; t_1' - ветвь поддиаграммы $\mathcal{D}_u$ в диаграмме $\mathcal{D}'$. При этом дуге d_1' в диаграмме $\mathcal{D}$ соответствует некоторая дуга d_1, ведущая из вершины u_1 в вершину v.

Обозначим: $y_1 = y_0 d_0' z_1$, и тогда $w' = y_0 d_0' t_0' = y_0 d_0' z_1 d_1' t_1' = y_1 d_1' t_1'$.

Далее мы применяем аналогичные рассуждения по отношению к ветви t_1' поддиаграммы $\mathcal{D}_u$ и в случае, если ветвь t_1' не содержится в диаграмме $\mathcal{D}$, получаем для нее представление: $t_1' = z_2 d_2' t_2'$ и т.д. Возможны два исхода.

2.I) На некотором шаге мы получаем такую ветвь t_n' поддиаграммы $\mathcal{D}_u$ диаграммы $\mathcal{D}'$, которая содержится в диаграмме $\mathcal{D}$. При этом ветвь w' представляется в виде (7) $w' = y_0 d'_0 z_1 d'_1 z_2 d'_2 \ldots z_n d'_n t'_n$, где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – начальные пути в диаграмме $\mathcal{D}_u$, дуги $d'_0, d'_1, \ldots, d'_n$ ведут в вершину u, и в диаграмме $\mathcal{D}$ им соответствуют дуги $d_0, d_1, \ldots, d_n$, ведущие в вершину v.

Поскольку ветвь t'_n поддиаграммы $\mathcal{D}_u$ содержится в диаграмме $\mathcal{D}$, то согласно предположению в поддиаграмме $\mathcal{D}_v$ существует ветвь t_n такая, что $\varphi t_n = t'_n$, и следовательно, $\mathbf{A}t_n f \mathbf{A}t'_n$ (8_n). Обозначим через t''_{n-1} ветвь $z_n d_n t_n$ поддиаграммы $\mathcal{D}_u$ в диаграмме $\mathcal{D}$. Для нее в поддиаграмме $\mathcal{D}_v$ существует ветвь t_{n-1} такая, что $\mathbf{A}t_{n-1} f \mathbf{A}t''_{n-1}$ (8_{n-1}). Далее аналогичным образом получаем ветвь $t''_{n-2} = z_{n-1} d_{n-1} t_{n-1}$ и для нее соответствующую ветвь t_{n-2} поддиаграммы $\mathcal{D}_v$ и т.д. вплоть до $t''_0 = z_1 d_1 t_1$ и ветви t_0 поддиаграммы $\mathcal{D}_v$ такой, что $\mathbf{A}t_0 f \mathbf{A}t''_0$ (8_0).

Обозначим через w ветвь $y_0 d_0 t_0$ диаграммы $\mathcal{D}$. Тогда из соотношений (7), (8_0)-(8_n) и определения ветвей t_0, t''_0, $t_1, t''_1, \ldots, t_n, t''_n$, в силу свойств ($f$ 2) и (f 3) побуквенных отношений получаем соотношение (6) : $\mathbf{A}w f \mathbf{A}w'$.

2.2) Процесс продолжается бесконечно. В этом случае для ветви w' получается бесконечное представление: $w' = y_0 d'_0 z_1 d'_1 z_2 d'_2 \ldots z_n d'_n \ldots$, где $z_1, z_2, \ldots$ – начальные пути в поддиаграмме $\mathcal{D}_u$ диаграммы $\mathcal{D}'$ и дуги $d'_0, d'_1, d'_2, \ldots$ ведут в вершину u, причем в диаграмме $\mathcal{D}$ этим дугам соответствуют дуги $d_0, d_1, d_2, \ldots$, ведущие в вершину v.

Рассмотрим для любых $m, n \in N'$ множества W_m^n, которые определим следующим образом:

$$W_m^1 = \{t \in W\mathcal{D}_v : \exists \tau \in W\mathcal{D}_u (\varphi t = z_m d_m \tau)\},$$

$$W_m^{n+1} = \{t \in W\mathcal{D}_v : \exists \tau \in W_{m+1}^n (\varphi t = z_m d_m \tau)\}.$$

С помощью индукции по n нетрудно показать, что все эти множества непусты. Действительно, для любого m множество W_m^1 непусто в силу того, что функция φ отображает множество $W\mathcal{D}_v$ на все множество $W\mathcal{D}_u$. Предположим, что для некоторого n и любого m из N' множества W_m^n непусты, и следовательно, существует ветвь τ поддиаграммы $\mathcal{D}_v$, принадлежащая множеству W_{m+1}^n. Поскольку $z_m d_m \tau$ является ветвью поддиаграммы $\mathcal{D}_u$, то существует ветвь t поддиаграммы $\mathcal{D}_v$ такая, что $\varphi t = z_m d_m \tau$, т.е. $t \in W_m^{n+1}$.

Покажем теперь, что существует ветвь t_0, поддиаграммы $\mathcal{D}_v$, принадлежащая всем множествам $W_1^1, W_1^2, \ldots, W_1^n, \ldots$

Из определения множеств W_m^n непосредственно следует, что $W_1^1 \supseteq W_1^2 \supseteq \ldots \supseteq W_1^n \supseteq \ldots$ (9). Возможны два случая.

а) Для некоторого n множество W_1^n конечно. Тогда в силу (9) существует такое n_0, что для любого $p \geqslant 0$: $W_1^{n_0} = W_1^{n_0+p}$. А так как все множества W_1^n непусты, то существует ветвь t_0, принадлежащая всем этим множествам.

б) Все множества W_1^n бесконечны. Рассмотрим множество M_1 всех начальных путей длины 1 поддиаграммы $\mathcal{D}_v$. Это множество конечно, поэтому в нем существует такой путь σ_1, который является началом бесконечного множества ветвей из W_1^1. Пусть определен начальный путь σ_n длины n, являющийся началом бесконечного множества ветвей из W_1^n. Определим σ_{n+1} следующим образом. Рассмотрим всевозможные продолжения пути σ_n длины $n+1$. Поскольку степень $\mathbf{A}, k$-диаграммы конечна, то их множество конечно. Поэтому среди этих продолжений найдется такое σ_{n+1}, которое является началом бесконечного множества ветвей из W_1^{n+1}. Таким образом для любого n будет получено продолжение σ_{n+1} начального пути σ_n, и следовательно, в результате этого процесса будет построена некоторая бесконечная ветвь t_0. Поскольку для любого n путь $t_0[1,n]=\sigma_n$ является началом ветви, принадлежащей любому множеству W_1^{n+p}, где $p\geqslant 0$, то в силу (9) это означает, что ветвь t_0 принадлежит всем множествам $W_1^1, W_1^2, \ldots$

Докажем теперь, что для любой ветви t из множества W_m^n найдется ветвь t_n поддиаграммы $\mathcal{D}_v$ такая, что (10): $\mathbf{A}tf\,\mathbf{A}z_m d_m' z_{m+1} d_{m+1}' \ldots z_{m+n-1} d_{m+n-1} t_n$. (Последовательность $z_m d_m' z_{m+1} d_{m+1}' \ldots z_{m+n-1} d_{m+n-1} t_n$ не является путем в диаграммах $\mathcal{D}$ или $\mathcal{D}'$, но составлена из путей обеих этих диаграмм). Воспользуемся индукцией по n. Поскольку для любого натурального числа $m>0$ и для всякой ветви t из множества W_m^1 существует ветвь t_1 поддиаграммы $\mathcal{D}_v$ такая, что $\varphi t = z_m d_m t_1$, то $\mathbf{A}tf\,\mathbf{A}z_m d_m t_1$. Предположим, что утверждение верно для любой ветви из множества W_m^n и докажем его для произвольной ветви t из множества W_m^{n+1}. По определению множества W_m^{n+1}, если $t\in W_m^{n+1}$, то в множестве W_{m+1}^n существует ветвь t_1 такая, что $\varphi t = z_m d_m t_1$.

Поскольку $t_1 \in W^n_{m+1}$, то по индуктивному предположению существует ветвь t_{n+1} поддиаграммы $\mathcal{D}_v$ такая, что $A t_1 f A z_{m+1} d'_{m+1} \ldots$ $\ldots z_{m+n} d_{m+n} t_{n+1}$. Поэтому в силу свойств $(f\ 2)$ и $(f\ 3)$ побуквенных отношений:

$$A t f A z_m d'_m z_{m+1} d'_{m+1} \ldots z_{m+n} d_{m+n} t_{n+1}.$$

Поскольку ветвь t_0 поддиаграммы $\mathcal{D}_v$ содержится в любом множестве W^n_1, $n = 1, 2, \ldots$, то из соотношения (10) получаем (11) : $A t_0 f A z_1 d'_1 z_2 d'_2 \ldots z_n d_n t_n$, где t_n - некоторая ветвь поддиаграммы $\mathcal{D}_v$.

Обозначим: $w_0 = w = y_0 d_0 t_0$, $w_{n+1} = y_0 d'_0 z_1 d'_1 z_2 \ldots$ $\ldots z_{n+1} d_{n+1} t_{n+1}$. При этом $w_0 = w$ является ветвью диаграммы $\mathcal{D}$, а w_n для $n > 0$ - вспомогательные последовательности вершин и дуг диаграмм $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$. Из (11) в силу свойств (f 2) и (f 3) побуквенных отношений следует, что для любого натурального n : $A w f A w_n$. А так как $w' =$ $= y_0 d'_0 z_1 d'_1 z_2 \ldots$, то $w_n \to w'$. Поскольку отношение f замкнуто относительно предельного перехода, то это означает, что $A w f A w'$. Итак, для $\Phi = \Omega_f$ теорема доказана.

(б) Пусть $\Phi \in \{I_f, \Psi_f\}$, и пусть диаграмма $\mathcal{D}'$ получается из диаграммы $\mathcal{D}$ применением одного Φ-сверточного шага к таким поддиаграммам $\mathcal{D}_v$, $\mathcal{D}_u$, что $\mathcal{D}_v \Phi \mathcal{D}_u$ и вершина v не является последователем вершины u, либо поддиаграмма $\mathcal{D}_u$ состоит из одной ветви. Поскольку $\mathcal{D}_v \Phi \mathcal{D}_u$, то существует функция φ, отображающая множество $W\mathcal{D}_v$ на множество $W\mathcal{D}_u$ так, что для любой ветви w из $W\mathcal{D}_v$ выполняется условие: $A w f A \varphi w$. При этом в случае, когда $\Phi = I_f$, функция

φ сильнооднозначна. Нам надо доказать, что $\mathcal{D}\Phi\mathcal{D}'$, т.е. что существует функция φ', отображающая множество $W\mathcal{D}$ на множество $W\mathcal{D}'$ так, что для любой ветви w из $W\mathcal{D}$ выполняется условие (I) : $\mathbf{A}w f \mathbf{A}\varphi' w$, причем функция φ' сильнооднозначна, если сильнооднозначна функция φ.

Пусть w - произвольная ветвь диаграммы $\mathcal{D}$. Если эта ветвь не проходит через вершину v, то она сохраняется при Φ-сверточном шаге и потому содержится и в диаграмме $\mathcal{D}'$. В таком случае мы полагаем: $\varphi' w = w$. Предположим, что ветвь w проходит через вершину v. Тогда представим ее в виде: $w = y_0 d_0 t$, где y_0 - начальный путь, ведущий в некоторую вершину v', непосредственно предшествующую вершине v; d_0 - дуга, ведущая из вершины v' в вершину v; t - ветвь поддиаграммы $\mathcal{D}_v$. Пусть $t' = \varphi t$ - ветвь поддиаграммы $\mathcal{D}_u$ в диаграмме $\mathcal{D}$. Если вершина v не является последователем вершины u и поддиаграмма $\mathcal{D}_v$ - висячая, то ветвь t' не затрагивается Φ-сверточным шагом и потому является ветвью поддиаграммы $\mathcal{D}_u$ в диаграмме $\mathcal{D}'$. Это означает, что в диаграмме $\mathcal{D}'$ имеется ветвь $w' = y_0 d_0' t'$, где d_0' - дуга, ведущая из вершины v' в вершину u. Поскольку $\mathbf{A}t f \mathbf{A}t'$ (I2) то в силу свойств (f 2) и (f 3) побуквенных отношений: $\mathbf{A}w f \mathbf{A}w'$. В этом случае полагаем: $\varphi' w = w'$.

Если же поддиаграмма $\mathcal{D}_u$ диаграммы $\mathcal{D}$ состоит из одной ветви t' и вершина v является последователем вершины u, то и поддиаграмма $\mathcal{D}_v$ состоит из одной ветви t. Поэтому $t' = t_0 d t$ (I3), где t_0 - путь из вершины u в некоторую вершину v'', непосредственно предшествующую вершине v, а d – дуга, ведущая из вершины v'' в вершину v. В результате применения Φ-сверточного шага к поддиаграммам $\mathcal{D}_v$, $\mathcal{D}_u$ мы получим в поддиаграмме $\mathcal{D}_u$ диаграммы $\mathcal{D}'$ ветвь $t'' = (t_0 d')^\infty$, где d' – дуга, ведущая из вершины v'' в вершину u. Покажем, что $\mathbf{A}t f \mathbf{A}t''$ (I4). Из (I3) следует, что $\mathbf{A}t' = \mathbf{A}t_0\mathbf{A}t$ (I5). Поэтому из (I2) в силу транзитивности побуквенных отношений получаем: $\mathbf{A}t f \mathbf{A}t_0\mathbf{A}t$ (I6.I). Предположим, что $\mathbf{A}t f (\mathbf{A}t_0)^n\mathbf{A}t$ (I6.n), где $n \geqslant 1$. Тогда с помощью (I6.I) в силу свойства (f 2) и транзитивности побуквенных отношений получаем: $\mathbf{A}t f (\mathbf{A}t_0)^{n+1}\mathbf{A}t$. Таким образом для любого $n \geqslant 1$ выполняется условие (I6.n). Поскольку $(\mathbf{A}t_0)^n\mathbf{A}t \xrightarrow[p]{} (\mathbf{A}t_0)^\infty$, где $p(n) = n\ell\mathbf{A}t_0$, то в силу замкнутости f относительно предельного перехода получаем: (I4) : $\mathbf{A}t f \mathbf{A}t''$.

В диаграмме $\mathcal{D}'$, очевидно, имеется ветвь $w' = y_0 d_0' t''$, где d_0' – дуга, ведущая из вершины v' в вершину u. Так как $w = y_0 d_0 t$, то из (I4) получаем: $\mathbf{A}w f \mathbf{A}w'$. Положив $\varphi' w = w'$, мы получим таким образом функцию φ', определенную на всем множестве $W\mathcal{D}$ и удовлетворяющую условию (I).

Чтобы доказать, что функция φ' отображает множество $W\mathcal{D}$ на все множество $W\mathcal{D}'$, достаточно показать, что любая ветвь w' диаграммы $\mathcal{D}'$ либо содержится в диаграмме $\mathcal{D}$, либо получается для некоторой ветви w диаграммы $\mathcal{D}$ одним из двух описанных выше способов, т.е. $w' = \varphi' w$.

Если ветвь w' не содержится в диаграмме $\mathcal{D}$, то это означает, что в ней имеется дуга d_0', ведущая в вершину u и соответствующая некоторой дуге d_0 диаграммы $\mathcal{D}$, ведущей в вершину v, т.е. ветвь w' представляется в виде: $w' = y_0 d'_0 t'$, где y_0 - начальный путь, содержащийся как в диаграмме $\mathcal{D}'$, так и в диаграмме $\mathcal{D}$, а t' - ветвь поддиаграммы $\mathcal{D}_u$ в диаграмме $\mathcal{D}'$. Согласно условию возможны два случая.

I) Вершина v в диаграмме $\mathcal{D}$ не является последователем вершины u. Тогда ветвь t' поддиаграммы $\mathcal{D}_u$ содержится и в диаграмме $\mathcal{D}$, а так как $\mathcal{D}_v \mathcal{P} \mathcal{D}_u$, где $\mathcal{P} \in \{I_f, \Psi_f\}$, то для ветви t' в поддиаграмме $\mathcal{D}_v$ существует соответствующая ветвь t такая, что $t' = \varphi t$, и следовательно, $\mathbf{A} t f \mathbf{A} t'$. В силу однозначности функции φ и в соответствии с определением функции φ' это означает, что ветвь w' соответствует ветви $w = y_0 d_0 t$ диаграммы $\mathcal{D}$, т.е. $w' = \varphi' w$.

2) Поддиаграмма $\mathcal{D}_u$ диаграммы $\mathcal{D}$ состоит из одной ветви, и вершина v является последователем (в $\mathcal{D}$) вершины u. Тогда и диаграмма $\mathcal{D}_v$ состоит из одной ветви t, и следовательно, поддиаграмма $\mathcal{D}_u$ в диаграмме $\mathcal{D}'$ также состоит из одной ветви. Поэтому в соответствии с определением функции φ' ветвь w' удовлетворяет условию: $w' = \varphi' w$, где $w = y_0 d_0 t$.

Таким образом, для $\mathcal{P} = \Psi_f$ теорема доказана. Чтобы доказать ее для $\mathcal{P} = I_f$ остается показать, что определенная выше функция φ' сильнооднозначна, если сильнооднозначна функция φ. Поскольку в рассматриваемом случае функция φ' является сужением функции φ', определенной в пункте а), то доказательство этого утверждения, данное в пункте а), распространяется и на рассматриваемый случай. Т орема доказана. $\downarrow$

3. <u>Сохранение свойств сверточными отношениями</u>

Мы говорим, что отношение Φ сохраняет (сильно сохраняет) n -местное свойство R на множестве $\mathcal{V}$ диаграмм, если для любых диаграмм $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n, \mathcal{D}_1', \ldots, \mathcal{D}_n'$ из $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{D}_1 \Phi \mathcal{D}_1' \,\&\, \ldots \,\&\, \mathcal{D}_n \Phi \mathcal{D}_n' \Rightarrow (R(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n) \Rightarrow R(\mathcal{D}_1', \ldots, \mathcal{D}_n'))$$

(соответственно, $\mathcal{D}_1 \Phi \mathcal{D}_1' \,\&\, \ldots \,\&\, \mathcal{D}_n \Phi \mathcal{D}_n' \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (R(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n) \Longleftrightarrow R(\mathcal{D}_1', \ldots, \mathcal{D}_n'))$).

Очевидно, что отношение Φ сильно сохраняет свойство R на множестве $\mathcal{V}$ диаграмм тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих (эквивалентных) условий:

(1) отношение Φ сохраняет на $\mathcal{V}$ свойства R и $\neg R$;

(2) отношения Φ и Φ^{-1} сохраняют на $\mathcal{V}$ свойство R .

Ясно также, что если отношение Φ_1 сохраняет свойство R и $\Phi_2 \subseteq \Phi_1$, то и отношение Φ_2 сохраняет свойство R . А так как для транзитивных устойчивых отношений Φ выполняется условие $\overset{\Phi}{\succ} \subseteq \Phi$, то мы получаем

<u>Предложение 2</u>. Если отношение Φ устойчиво на множестве $\mathcal{V}$ диаграмм и Φ сильно сохраняет n -местное свойство R на $\mathcal{V}$, то отношение $\overset{\Phi}{\succ}$ сильно сохраняет свойство R , т.е. для всяких диаграмм $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ из $\mathcal{V}$ и любых их Φ -сверток $\mathcal{D}_1^{\Phi}, \ldots, \mathcal{D}_n^{\Phi}$ выполняется условие:

$$R(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n) \Longleftrightarrow R(\mathcal{D}_1^{\Phi}, \ldots, \mathcal{D}_n^{\Phi}).$$

Из этого предложения следует, что если отношение Φ устойчиво на некотором множестве $\mathcal{V}$ диаграмм, и для диаграмм из $\mathcal{V}$ существуют конечные Φ-свертки, то всякое свойство R , сильно сохраняемое отношением Φ и разрешимое на конечных диаграммах, разрешимо и на множестве $\mathfrak{V}$ относительно получения конечных Φ-сверток.

Если же не требовать устойчивости отношения Φ, то аналогичный результат можно получить для специальных классов свойств.

Обозначим через $\overset{\Phi}{\underset{1}{\prec}}$ ($\overset{\Phi}{\prec}$) отношение, обратное отношению $\overset{\Phi}{\underset{1}{\succ}}$ ($\overset{\Phi}{\succ}$), т.е. $\mathcal{D}\overset{\Phi}{\underset{1}{\prec}}\mathcal{D}'$ тогда и только тогда, когда диаграмма $\mathcal{D}'$ получается из диаграммы $\mathcal{D}$ следующим образом: от некоторой вершины v диаграммы $\mathcal{D}$, отрицательная степень которой равна $m > 1$, отсоединяются $n < m$ ведущих в нее дуг, и эти дуги присоединяются к корню такой (не содержащейся в $\mathcal{D}$) диаграммы $\mathcal{D}_1$, что $\mathcal{D}_1 \Phi \mathcal{D}_v$. Операцию такого вида назовем операцией Φ-развертки.

Пусть U – универсальное бинарное отношение на множестве $\mathfrak{V}$ диаграмм, т.е. $U = \mathfrak{V} \times \mathfrak{V}$. Тогда вместо $\overset{U}{\underset{1}{\succ}}$, $\overset{U}{\succ}$, $\overset{U}{\underset{1}{\prec}}$, $\overset{U}{\prec}$ будем писать, соответственно, $\underset{1}{\succ}$, $\succ$, $\underset{1}{\prec}$, $\prec$. Ясно, что для любого отношения Φ: $\overset{\Phi}{\underset{1}{\succ}} \subseteq \underset{1}{\succ}$, $\overset{\Phi}{\succ} \subseteq \succ$, $\overset{\Phi}{\underset{1}{\prec}} \subseteq \underset{1}{\prec}$, $\overset{\Phi}{\prec} \subseteq \prec$.

Мы называем субдиаграммой диаграммы $\mathcal{D}$ такую ее поддиаграмму, которая вместе с каждой своей неконцевой вершиной содержит хотя бы один ее непосредственный последователь. Субдиаграмма (поддиаграмма) называется начальной, если ее корень совпадает с корнем всей диаграммы.

Используя это понятие, отношения I_f', Ψ_f', Ω_f' можно определить так: если $\Phi \in \{I_f, \Psi_f, \Omega_f\}$, то $\mathcal{D}_1 \Phi' \mathcal{D}_2$ тогда и только тогда, когда существует начальная субдиаграмма $\mathcal{D}_2'$ диаграммы $\mathcal{D}_2$ такая, что $\mathcal{D}_1 \Phi \mathcal{D}_2'$. Вообще, для произвольного отношения Φ будем обозначать через Φ' такое отношение, что $\mathcal{D}_1 \Phi' \mathcal{D}_2$ тогда и только тогда, когда существует начальная субдиаграмма $\mathcal{D}_2'$ диаграммы $\mathcal{D}_2$, удовлетворяющая условию: $\mathcal{D}_1 \Phi \mathcal{D}_2'$.

Одноместное свойство R на множестве диаграмм называется доминантным, если выполняются следующие два условия:

(d I) если в диаграмме $\mathcal{D}$ существует субдиаграмма $\mathcal{D}_1$, такая, что $R(\mathcal{D}_1)$, то $R(\mathcal{D})$;

(d 2) если диаграмма $\mathcal{D}'$ получается из диаграммы $\mathcal{D}$ применением U-сверточного шага к таким поддиаграммам $\mathcal{D}_v$, $\mathcal{D}_u$, что $\neg R(\mathcal{D}_v)$, то $R(\mathcal{D}) \Rightarrow R(\mathcal{D}')$.

Легко доказывается следующее

<u>Предложение 3</u>. Если отношения Φ и $\underset{1}{\overset{\Phi}{\prec}}$ сохраняют доминантное свойство R, то отношение Φ-свертки $\overset{\Phi}{\succ}$ сильно сохраняет свойство R, т.е. для любой диаграммы $\mathcal{D}$ и любой ее Φ-свертки $\mathcal{D}^{\Phi}$ выполняется условие: $R(\mathcal{D}) \Leftrightarrow R(\mathcal{D}^{\Phi})$.

Достаточно доказать это утверждение для произвольной диаграммы $\mathcal{D}$ и такой ее Φ-свертки $\mathcal{D}^{\Phi}$, которая получается применением к $\mathcal{D}$ одного Φ-сверточного шага. Пусть $R(\mathcal{D})$, и пусть Φ-сверточный шаг применяется к поддиаграммам $\mathcal{D}_v$, $\mathcal{D}_u$. Предположим, что $R(\mathcal{D}_v)$. Тогда, так как $\mathcal{D}_v \Phi \mathcal{D}_u$, и отношение Φ сохраняет свойство R, то $R(\mathcal{D}_u)$, и следовательно, в силу условия (d I): $R(\mathcal{D}^{\Phi})$. Если же $\neg R(\mathcal{D}_v)$, то $R(\mathcal{D}^{\Phi})$ в силу условия (d 2). Обратное соотношение: $R(\mathcal{D}^{\Phi}) \Rightarrow R(\mathcal{D})$ тривиально. $\downarrow$

Как и в [2] рассмотрим для примера следующие пять одноместных свойств диаграмм:

1. $O(\mathcal{D})$ - диаграмма $\mathcal{D}$ содержит конечную ветвь.
2. $Б(\mathcal{D})$ - диаграмма $\mathcal{D}$ содержит бесконечную ветвь.
3. $C_a(\mathcal{D})$ - в $\mathbf{A}, k$-диаграмме $\mathcal{D}$ иметтся вершина, которой приписана буква a
4. $C_a^{\infty}(\mathcal{D})$ - в $\mathbf{A}, k$-диаграмме $\mathcal{D}$ имеется ветвь с бесконечным множеством вершин, которым приписана буква a
5. $O^{\infty}(\mathcal{D})$ - диаграмма $\mathcal{D}$ содержит бесконечное множество конечных ветвей.

Нетрудно убедиться, что все эти свойства (но не их отрицания) доминантны. Кроме того, ясно, что все эти свойства и их отрицания разрешимы на конечных диаграммах. Таким образом, эти свойства разрешимы на множествах диаграмм, для которых существует эффективная процедура получения конечных Φ-сверток, где отношение Φ удовлетворяет условиям предложений 2 или 3.

При установлении фактов сохранения или несохранения свойств бинарными отношениями полезно следующее очевидное

<u>Предложение 4</u>. Бинарное отношение Φ сохраняет свойство R тогда и только тогда, когда отношение Φ^{-1} сохраняет свойство $\neg R$.

Непосредственнсй проверкой, используя также предложение 4, нетрудно для свойств 1-5 и их отрицаний установить факты сохранения или несохранения этих свойств отношениями вида Φ_f , $\overset{\Phi_f}{\succ}$, $\overset{\Phi_f}{\prec}$, а также обратными им, где f - произвольное побуквенное отношение, а $\Phi \in \{I, \Psi, \Omega, I', \Psi', \Omega'\}$. Результаты сведены в таблицу I, где знаки + и - обозначают, соответственно, сохранение и несохранение данного свойства соответствующим отношением. С помощью этой таблицы и предложений 2 и 3 можно судить, какие из указанных свойств сильно сохраняются теми или иными сверточными отношениями.

4. $K\Phi$-свертки

Каждый Φ-сверточный шаг применяется к паре поддиаграмм, находящихся в отношении Φ . Теперь мы рассмотрим более сложную сверточную операцию - так называемый $K\Phi$-сверточный шаг, который применяется сразу к конечному множеству поддиаграмм и включает в себя ряд Φ'-сверточных шагов. Для простоты мы ограничиваемся рассмотрением $K\Phi$-сверточных операций для случая, когда $\Phi = I_f$. Хотя такая операция шире, чем I'_f-сверточный шаг, однако в случае, когда f -побуквенное отношение, замкнутое относительно предельного перехода, всякая KI_f-свертка находится с исходной диаграммой в отношении I'_f (теорема 4).

Определим ряд вспомогательных понятий, в том числе некоторое бинарное отношение $\hat{I}_f$ на множестве висячих поддиаграмм произвольной $\mathbf{A},k$ - диаграммы. Здесь f - бинарное отношение на множестве $\mathbf{A}^{\circledast}$.

Пусть $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ - $\mathbf{A},k$ - диаграммы и пусть $\mathcal{D}_1 I_f \mathcal{D}_2$, т.е. существует сильнооднозначная функция φ , отображающая множество $W\mathcal{D}_1$ на множество $W\mathcal{D}_2$, так, что для любой ветви w из $W\mathcal{D}_1$ выполняется условие: $\mathbf{A}w f \mathbf{A}\varphi w$. В этом случае ветви

Отн. / Св-ва	I_f	I_f^{-1}	$I_f\angle$	I'_f	$(I'_f)^{-1}$	$I'_f\angle$	Ψ_{I_f}	$\Psi_{I_f}^{-1}$	$\Psi_{I_f}\angle$	Ψ'_{I_f}	$(\Psi'_{I_f})^{-1}$	$\Psi'_{I_f}\angle$	Ω_f	Ω_f^{-1}	$\Omega_f\angle$	Ω'_f	$(\Omega'_f)^{-1}$	$\Omega'_f\angle$
O	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	−	+
Б	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	−	+
C_a	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	−	+
C_a^∞	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+
O^∞	+	+	+	+	−	+	−	+	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+
$П = \neg O$	+	+	+	−	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	−	+	+
$\neg Б$	+	+	+	−	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	−	+	+
$\neg C_a$	+	+	+	−	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	−	+	+
$\neg C_a^\infty$	+	−	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+
$\neg O^\infty$	+	+	+	−	+	+	+	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+

Таблица I.

w и φw будем называть соответствующими. Вершины v и v' диаграмм $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ назовем соответствующими, если они являются концами соответствующих ветвей.

Две различные вершины v_1, v_2 мы называем несравнимыми, если ни одна из них не предшествует другой.

Для произвольной диаграммы $\mathcal{D}$ будем обозначать через $\widehat{\mathcal{D}}$ ее начальную поддиаграмму, полученную из $\mathcal{D}$ следующим образом. Пусть $M = \{ v_1, v_2, \dots \}$ – некоторое (конечное или бесконечное) множество попарно несравнимых вершин диаграммы $\mathcal{D}$ таких, что поддиаграммы $\mathcal{D}_{v_1}, \mathcal{D}_{v_2}, \dots$ – висячие и каждая из них содержит более одной вершины. Тогда диаграмма $\widehat{\mathcal{D}}$ получается из $\mathcal{D}$ удалением всех последователей вершин v_1, $v_2, \dots$ (т.е. от поддиаграмм $\mathcal{D}_{v_1}, \mathcal{D}_{v_2}, \dots$ оставляются только корни). Множество M будем называть концевым множеством поддиаграммы $\widehat{\mathcal{D}}$.

Ниже в данном разделе мы называем путем из вершины v_0 в вершину v_{n+1} последовательность вида $v_0 d_0 v_1 d_1 \dots v_n d_n$, где для $i = 0, 1, \dots, n$, d_i – дуга, ведущая из вершины v_i в вершину v_{i+1}. Как обычно, мы считаем, что путь w проходит через вершину v, если эта вершина встречается в пути w.

Концевое множество поддиаграммы $\widehat{\mathcal{D}}_v$ будем обозначать через M_v.

Определим бинарное отношение I_f на множестве A, k – диаграмм следующим образом: $\mathcal{D}_1 \hat{I}_f \mathcal{D}_2$ тогда и только тогда, когда существуют поддиаграммы $\widehat{\mathcal{D}}_1$, $\widehat{\mathcal{D}}_2$, удовлетворяющие условиям:

(J 1) $\widehat{\mathcal{D}}_1 I_f \widehat{\mathcal{D}}_2$ и

(J 2) если v_1, v_2 – соответствующие вершины поддиаграмм $\widehat{\mathcal{D}}_1$, $\widehat{\mathcal{D}}_2$, то $v_1 \in M_1 \Leftrightarrow v_2 \in M_2$.

KI_f-сверточный шаг применим к такой A, k-диаграмме $\mathcal{D}$, которая содержит попарно несравнимые вершины $\eta_1, \dots, \eta_m$ и попарно несравнимые вершины $\xi_{11}, \dots, \xi_{1n_1}, \xi_{21}, \dots, \xi_{2n_2}, \dots, \xi_{m1}, \dots, \xi_{mn_m}$ такие, что для любых i, j, p, q, где $1 \leqslant i, p \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n_i$, $1 \leqslant q \leqslant n_p$, выполняются условия:

KI. Любая вершина η_i не является последователем любой вершины ξ_{pq} и не совпадает с ней.

K2. Все поддиаграммы $\mathcal{D}_{\xi_{ij}}$ – висячие.

K3. $\mathcal{D}_{\xi_{ij}} \widehat{I}_f \mathcal{D}_{\eta_i}$, причем поддиаграммы $\widehat{\mathcal{D}}_{\xi_{ij}}$ и $\widehat{\mathcal{D}}_{\eta_i}$, определяемые отношением $\widehat{I}_f$, удовлетворяют следующим условиям:

K3.I. для любой вершины ε из M_{η_i} поддиаграмма $\mathcal{D}_\varepsilon$ – висячая;

K3.2. любая вершина из множества M_{η_p} не предшествует вершине ξ_{ij} и не совпадает с ней;

K3.3. если вершина ξ_{ij} является последователем вершины η_p, то $M_{\xi_{ij}} \subseteq M_{\eta_p}$, причем, если $\varepsilon \in M_{\eta_p}$ и ε является последователем вершины ξ_{ij}, то $\varepsilon \in M_{\xi_{ij}}$;

K3.4. для любой пары соответствующих вершин ε, ε_1 поддиаграмм $\widehat{\mathcal{D}}_{\xi_{ij}}$, $\widehat{\mathcal{D}}_{\eta_i}$ если $\varepsilon \in M_{\xi_{ij}}$ и $\varepsilon_1 \in M_{\eta_i}$, то в поддиаграмме $\overline{\mathcal{D}}_M = \mathcal{D} - \bigcup_{v \in M} \mathcal{D}_v$, где $M = \{ \xi_{ij} : 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n_i \} \cup \bigcup_{i=1}^{m} M_{\eta_i}$, найдется вершина ρ такая, что $\mathcal{D}_\varepsilon I'_f \mathcal{D}_\rho$ и $\mathcal{D}_{\varepsilon_1} I'_f \mathcal{D}_\rho$, причем:

КЗ.4.1. если, кроме того, $\varepsilon_1 \in M_{\xi_{pq}}$ и ε_2 – соответствующая ей вершина из M_{η_p}, то $\mathcal{D}_{\varepsilon_2} I'_f \mathcal{D}_\rho$, где ρ – та же вершина, что и в пункте КЗ.4.

В применении к такой диаграмме $\mathcal{D}$ (т.е. с выбранными вершинами $\eta_1, \dots, \eta_m$ и $\xi_{11}, \dots, \xi_{mn_m}$, удовлетворяющими вышеприведенным условиям) $\mathbf{K}I_f$-сверточный шаг состоит из следующих операций:

1) применение $\hat{I}_f$-сверточных шагов ко всем парам поддиаграмм $\mathcal{D}_{\xi_{ij}}, \mathcal{D}_{\eta_i}$, где $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n_i$;

2) применение I'_f-сверточных шагов ко всем или некоторым парам поддиаграмм $\mathcal{D}_\varepsilon$, $\mathcal{D}_\rho$, где ε – вершина из концевого множества M_{η_i}, не входящая в множества $M_{\xi_{pq}}$, $1 \leqslant p \leqslant m$, $1 \leqslant q \leqslant n_p$, а ρ – вершина, удовлетворяющая условию КЗ.4 (множества M_{η_i} и $M_{\xi_{pq}}$ определяются условием КЗ).

Диаграмму $\mathcal{D}'$, которую можно получить из диаграммы $\mathcal{D}$ с помощью $\mathbf{K}I_f$-сверточных и I'_f-сверточных шагов, назовем $\mathbf{K}I_f$-сверткой диаграммы $\mathcal{D}$, т.е. операция $\mathbf{K}I_f$-свертки – это конечная композиция $\mathbf{K}I_f$-сверточных и I'_f-сверточных шагов. Соответствующее отношение обозначим $\xrightarrow{KI_f}$.

<u>Теорема 4</u>. Если f – побуквенное отношение на $\mathbf{A}^{\circledast}$, замкнутое относительно предельного перехода, и диаграмма $\mathcal{D}'$ является К I_f-сверткой $\mathbf{A}, k$-диаграммы $\mathcal{D}$, то $\mathcal{D} I'_f \mathcal{D}'$, т.е. $\xrightarrow{KI_f} \subseteq I'_f$.

$\uparrow$ В силу теоремы 3, а также ввиду транзитивности отношения I'_f достаточно рассмотреть случай, когда диаграмма $\mathcal{D}'$ получается из диаграммы $\mathcal{D}$ применением одного $\mathbf{K}I_f$-сверточного шага. Пусть он применяется к поддиаграммам с корнями $\eta_1, \ldots, \eta_m, \xi_{11}, \ldots, \xi_{mn_m}$, удовлетворяющим условиям КI-К3.4.I. Не уменьшая общности, мы можем считать, что I'_f-сверточные шаги применяются ко всем парам поддиаграмм $\mathcal{D}_\varepsilon$, $\mathcal{D}_\rho$, указанным в пункте 2) определения $\mathbf{KI}_f$-сверточного шага. Нам надо доказать, что для любой ветви w диаграммы $\mathcal{D}$ в диаграмме $\mathcal{D}'$ найдется такая ветвь w', что $\mathbf{A}w f \mathbf{A}w'$, причем функция φ, определяемая условием: $\varphi w = w'$, сильнооднозначна.

Введем следующие обозначения:

(ξw) - путь w проходит через некоторую вершину ξ_{ij}, $1 < i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n_i$;

($M_\xi w$) - путь w проходит через некоторую вершину из концевого множества $M_{\xi_{ij}}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n_i$;

($M_\eta w$) - путь w проходит через некоторую вершину из концевого множества M_{η_i}, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Отрицания этих предикатов обозначим, соответственно, ($\overline{\xi} w$), ($\overline{M}_\xi w$), ($\overline{M}_\eta w$). Вместо конъюнкций вида (ξw)& ($\overline{M}_\eta w$) будем писать (ξw, $\overline{M}_\eta w$).

Дальнейшее доказательство производится по следующей схеме. Сначала для произвольной ветви w диаграммы $\mathcal{D}$ мы доказываем существование в диаграмме $\mathcal{D}'$ ветви w', удовлетворяющей условию: $\mathbf{A}w f \mathbf{A}w'$. Для этого мы рассматриваем для ветви w случаи 0, I, 2, 3, соответствующие ситуациям ($\overline{\xi} w, \overline{M}_\eta w$), ($\overline{\xi} w, M_\eta w$), ($\xi w, \overline{M}_\xi w$) и ($\xi w, M_\xi w$). (Легко видеть, что эти ситуации образуют полный набор случаев). В случае 0 доказательство завершается, а в случаях a, где $a \in \{I, 2, 3\}$, оно сводится к рассмотрению всевозможных подслучаев $b = 0, I, 2, 3$ для некоторого пути z_1, полученного в ходе доказательства. Такие ситуации мы обозначаем через ab. В случае $a0$ доказательство завершается, а в случаях aI, $a2$ и $a3$ оно должно быть продолжено рассмотрением случаев 0, I, 2, 3 для некоторого пути z_2 и т.д. С помощью индукции мы показываем, что для любого α из $\{I, 2, 3\}^*$ в случае $\alpha 0$ доказательство завершается, а в случае αa, где $a \in \{I, 2, 3\}$, доказательство продолжается с результатом, аналогичным результату в случае α. Таким образом, для завершения доказательства остается рассмотреть всевозможные случаи вида α, где $\alpha \in \{I, 2, 3\}^\infty$, что и делается в последнем пункте 4.

Итак, сначала в качестве базиса индукции рассматриваем случаи 0, I, 2, 3 для произвольной ветви w диаграммы $\mathcal{D}$.

0. $(\bar{\xi} w, \bar{M}_\eta w)$. В этом случае ветвь w не проходит через корни поддиаграмм $\mathcal{D}_{\xi_{ij}}$ и $\mathcal{D}_\varepsilon$, где $\varepsilon \in M_{\eta_i}$, которые отбрасываются при KI_f-сверточном шаге, а так как согласно K2 и K3.I эти поддиаграммы висячие, то это означает, что ветвь w не затрагивается KI_f-сверточным шагом и поэтому содержится и в диаграмме $\mathcal{D}'$, т.е. в этом случае $w' = w$.

I. $(\xi w, M_\eta w)$. В этом случае ветвь w представляется в виде (I) : $w = y_0 z_0$, где y_0 - начальный путь в некоторую вершину ε из концевого множества M_{η_i}, а z_0 - ветвь поддиаграммы $\mathcal{D}_\varepsilon$ (схема этого случая изображена на рисунке 2).

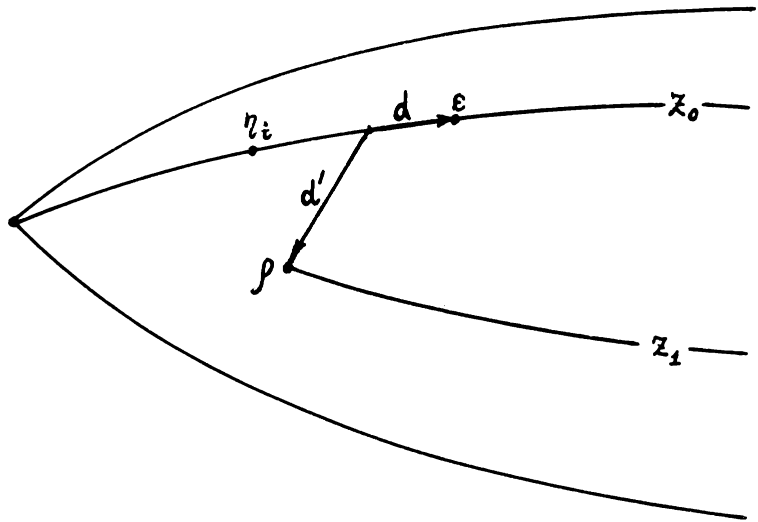


Рис. 2.

Согласно К3.4 в поддиаграмме $\overline{\mathcal{D}}_M = \mathcal{D} - \bigcup_{v \in M} \mathcal{D}_v$, где $M = \{\xi_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i\} \cup \bigcup_{i=1}^{m} M_{\eta_i}$, существует вершина ρ такая, что $\mathcal{D}_\varepsilon I'_f \mathcal{D}_\rho$, и следовательно, в поддиаграмме $\mathcal{D}_\rho$ имеется ветвь z_1, удовлетворяющая условию ($\ast$ I) : $\mathbf{A} z_0 f \mathbf{A} z_1$. По определению $\mathbf{K}I_f$-сверточного шага в диаграмме $\mathcal{D}'$ существует начальный путь y_1 в вершину ρ, отличающийся от пути y_0 только последней дугой, которая вместо вершины ε ведет в вершину ρ, и следовательно, $\mathbf{A} y_1 = \mathbf{A} y_0$. Поэтому в силу (I), ($\ast$ I) и свойств (f 2), (f 3) побуквенных отношений получаем (Δ I) : $\mathbf{A} w f \mathbf{A} y_1 z_1$, где y_1 - начальный путь в диаграмме $\mathcal{D}'$.

2. ($\xi w, \overline{M}_\xi w$). В этом случае ветвь w можно представить в виде: $w = y_0 z_0$, где y_0 – начальный путь в вершину ξ_{ij} , а z_0 – ветвь поддиаграммы $\mathcal{D}_{\xi_{ij}}$.

Поскольку ветвь w , а следовательно и z_0, не проходит через вершину из концевого множества $M_{\xi_{ij}}$, то по определению отношения $\hat{I}_f$ в поддиаграмме $\mathcal{D}_{\eta_i}$ существует ветвь z_1 такая, что $\mathbf{A} z_0 f \mathbf{A} z_1$ ($*$ I), ибо в этом случае z_0 и z_1 являются ветвями, соответственно, поддиаграмм $\hat{\mathcal{D}}_{\xi_{ij}}$ и $\hat{\mathcal{D}}_{\eta_i}$. Обозначим через y_1 начальный путь в вершину η_i , отличающийся от пути y_0 только последней дугой. Тогда из ($*$ I), как и в случае I, получим соотношение (Δ I): $\mathbf{A} w f \mathbf{A} y_1 z_1$, где начальный путь y_1 , в силу условия К3.2, содержится в диаграмме $\mathcal{D}'$.

3. ($\xi w, M_\xi w$). В этом случае ветвь w можно представить в виде: $w = w_{\xi_{ij}} w_\varepsilon z_0$, где $w_{\xi_{ij}}$ – начальный путь в вершину ξ_{ij} , w_ε – путь из вершины ξ_{ij} в некоторую вершину ε из концевого множества $M_{\xi_{ij}}$, а z_0 – ветвь поддиаграммы $\mathcal{D}_\varepsilon$. Поскольку w_ε является ветвью поддиаграммы $\hat{\mathcal{D}}_{\xi_{ij}}$, то согласно (J I) ей соответствует ветвь w_{ε_1} поддиаграммы $\hat{\mathcal{D}}_{\eta_i}$, ведущая в некоторую вершину ε_1 из концевого множества M_{η_i} , причем выполняется условие (I): $\mathbf{A} w_\varepsilon f \mathbf{A} w_{\varepsilon_1}$. Отметим, что в силу КI и К2 путь w_{ε_1} содержится в диаграмме $\mathcal{D}'$.

Согласно К3.4 в поддиаграмме $\overline{\mathcal{D}}_M$ (а следовательно, и в диаграмме $\mathcal{D}'$) существует вершина ρ такая, что в поддиаграмме $\mathcal{D}_\rho$ имеется ветвь z_1 , удовлетворяющая условию ($*$ I): $\mathbf{A} z_0 f \mathbf{A} z_1$.

Возможны два случая: $(\overline{\xi}\, w_{\varepsilon_1})$ и $(\xi\, w_{\varepsilon_1})$.

а) Пусть $(\overline{\xi}\, w_{\varepsilon_1})$, т.е. путь w_{ε_1} не проходит через какую-либо вершину ξ_{pq}. Тогда в диаграмме $\mathcal{D}'$ существует путь $w_{\varepsilon_1|\rho}$ из вершины η_i в вершину ρ, отличающийся от пути w_{ε_1} только последней дугой и потому удовлетворяющий условию (2) : $\mathbf{A} w_{\varepsilon_1|\rho} = \mathbf{A} w_{\varepsilon_1}$. Обозначим: $y_1 = w_{\xi_{ij}} w_{\varepsilon_1|\rho}$. Согласно определению KI_f-сверточного шага начальный путь y_1 в вершину ρ содержится в диаграмме $\mathcal{D}'$. Из (I), (2) и ($*$ I) в силу свойств (f 2) и (f 3) побуквенных отношений получаем (Δ I) : $\mathbf{A} w f \mathbf{A} y_1 z_1$.

б) $(\xi\, w_{\varepsilon_1})$, т.е. путь w_{ε_1} проходит через некоторую вершину ξ_{pq} (см.рисунок 3). Пусть $w_{\varepsilon_1} = t_1 w'_{\varepsilon_1}$, где t_1 - путь из вершины η_i в вершину ξ_{pq}, а w'_{ε_1} - путь из вершины ξ_{pq} в вершину ε_1. Отметим, что в силу (I), $l w'_{\varepsilon_1} < l w_{\varepsilon}$ (3).

Согласно К3.3 вершина ε_1 принадлежит концевому множеству $M_{\xi_{pq}}$, поэтому в силу К3 в M_{η_p} имеется соответствующая ей вершина ε_2, для которой согласно К3.4.I выполняется условие: $\mathcal{D}_{\varepsilon_2} I'_f \mathcal{D}_\rho$. Обозначим через w_{ε_2} путь из вершины η_p в вершину ε_2. Если путь w_{ε_2} не проходит через какую-либо вершину ξ_{rs}, то обозначим через y_1 начальный путь $w_{\xi_{ij}|\eta_i} t'_1 w_{\varepsilon_2|\rho}$, где $w_{\xi_{ij}|\eta_i}$ - начальный путь в вершину η_i, t'_1 - путь из вершины η_i в вершину η_p, а $w_{\varepsilon_2|\rho}$ - путь из вершины η_p в вершину ρ, причем все эти пути отличаются, соответственно, от путей $w_{\xi_{ij}}$, t_1 и w_{ε_2} только последними дугами, и следовательно, $\mathbf{A} w_{\xi_{ij}|\eta_i} = \mathbf{A} w_{\xi_{ij}}$, $\mathbf{A} t'_1 = \mathbf{A} t_1$

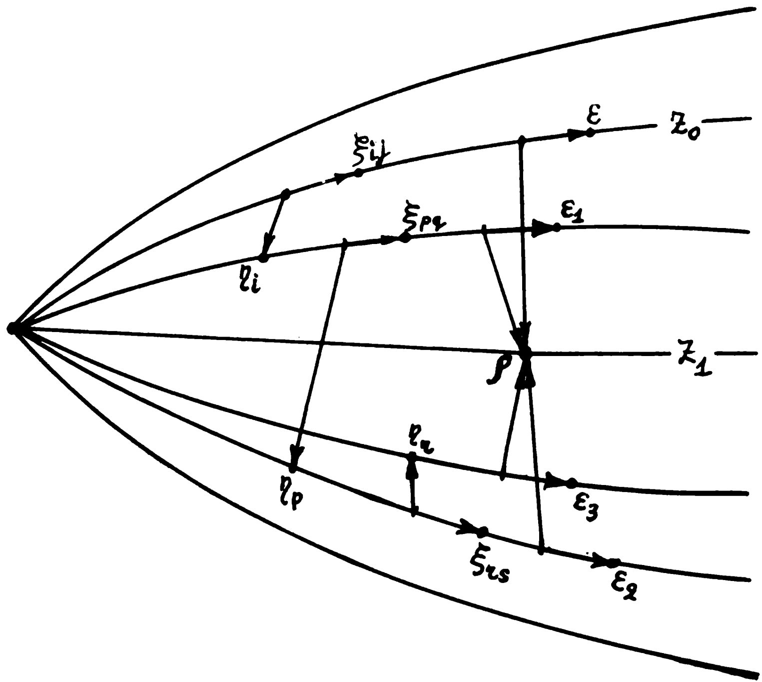


Рис. 3.

и $\mathbf{A}\, w_{\varepsilon_2|\rho} = \mathbf{A}\, w_{\varepsilon_2}$. Тогда, как и в случае а), получаем соотношение (Δ I): $\mathbf{A}\, w f \mathbf{A}\, y_1 z_1$, причем согласно определению $\mathbf{KI}_f$-сверточного шага начальный путь y_1 содержится в диаграмме $\mathcal{D}'$.

Предположим, что путь w_{ε_2} проходит через некоторую вершину ξ_{rs} , т.е. $w_{\varepsilon_2} = t_2 w'_{\varepsilon_2}$, где t_2 - путь из вершины η_p в вершину ξ_{rs} , а w'_{ε_2} - путь из вершины ξ_{rs} в вершину ε_2 (см. рисунок 3). Так как $lw'_{\varepsilon_2} < lw_{\varepsilon_2} \leq lw'_{\varepsilon_1}$, то в силу (3) : $lw'_{\varepsilon_2} < lw'_{\varepsilon_1} < lw_{\varepsilon}$(4). Согласно К3.3 вершина ε_2 принадлежит множеству $M\xi_{\tau s}$, поэтому в силу К3 в концевом множестве M_{η_τ} существует соответствующая вершина ε_3, для которой согласно К3.4.I выполняется условие: $\mathcal{D}_{\varepsilon_3} I'_f \mathcal{D}_{\rho}$.

Если путь w_{ε_3} из вершины η_τ в вершину ε_3 не проходит через какую-либо вершину ξ_{tl}, то обозначим через y_1 начальный путь $w_{\xi_{ij}|\eta_i} t'_1 t'_2 w_{\varepsilon_3|\rho}$, где t'_2 – путь из вершины η_p в вершину η_τ, отличающийся от пути t_2 из вершины η_p в вершину $\xi_{\tau s}$ только последней дугой, а $w_{\varepsilon_3|\rho}$ – путь из вершины η_τ в вершину ρ, отличающийся от пути w_{ε_3} только последней дугой (пути $w_{\xi_{ij}|\eta_i}$ и t'_1 определены выше). Тогда, как и в предыдущем случае, мы получим соотношение (Δ I) : $\mathbf{A} w f \mathbf{A} y_1 z_1$, где y_1 – начальный путь в диаграмме $\mathcal{D}'$.

Если же путь w_{ε_3} проходит через некоторую вершину ξ_{tl}, то применив к w_{ε_3} такие же рассуждения, как и для w_{ε_2}, мы получим соотношение (5) : $lw'_{\varepsilon_3} < lw'_{\varepsilon_2} < lw'_{\varepsilon_1} < lw_{\varepsilon}$, из которого следует, что такой процесс не может продолжаться бесконечно, и потому на некотором шаге мы получим нужное соотношение (Δ I).

Итак, для произвольной ветви w диаграммы $\mathcal{D}$ мы получили в случае **0** ветвь w' диаграммы $\mathcal{D}'$, удовлетворяющую условию $\mathbf{A} w f \mathbf{A} w'$, а в каждом из случаев I,2,3 – начальный путь y_1 диаграммы $\mathcal{D}'$, ведущий в некоторую вершину v_1, и ветвь z_1 поддиаграммы $\mathcal{D}_{v_1}$ диаграммы $\mathcal{D}$ такие, что выполняется условие (Δ I): $\mathbf{A} w f \mathbf{A} y_1 z_1$. При этом вершина является либо одной из вершин η_i, либо вершиной ρ поддиаграммы $\overline{\mathcal{D}}_M$, и следовательно, вершина v_1 содержится в диаграмме $\mathcal{D}'$.

Предположим, что для ветви w диаграммы $\mathcal{D}$ в случае α, где $\alpha \in \{1,2,3\}^n$, $n \geqslant 1$, в диаграмме $\mathcal{D}'$ получен начальный путь y_n, ведущий в некоторую вершину v_n, и в поддиаграмме $\mathcal{D}_{v_n}$ диаграммы $\mathcal{D}$ существует ветвь z_n такая, что выполняется условие (Δn) : $\mathbf{A}w f \mathbf{A} y_n z_n$. Рассмотрим всевозможные случаи αa, где $a \in \{0,1,2,3\}$, т.е. случаи a для ветви z_n поддиаграммы $\mathcal{D}_{v_n}$, и покажем, что в случае $\alpha 0$ в диаграмме $\mathcal{D}'$ существует ветвь w' такая, что $\mathbf{A}w f \mathbf{A} w'$, а в случаях αa, где $a \in \{1,2,3\}$, в диаграмме $\mathcal{D}'$ существует начальный путь y_{n+1}, ведущий в некоторую вершину v_{n+1} и являющийся продолжением пути y_n, причем в поддиаграмме $\mathcal{D}_{v_{n+1}}$ диаграммы $\mathcal{D}$ существует ветвь z_{n+1} такая, что выполняется условие $(\Delta n+1)$: A $\mathbf{A} w f \mathbf{A} y_{n+1} z_{n+1}$.

$\alpha 0$. Если путь z_n удовлетворяет условию 0 : $(\overline{\xi} z_n, \overline{M}_\eta z_n)$, то он не затрагивается $\mathbf{KI}_\xi$-сверточным шагом и потому последовательность $w' = y_n z_n$ является ветвью диаграммы $\mathcal{D}'$. В силу (Δn) эта ветвь удовлетворяет нужному требованию: $\mathbf{A} w f \mathbf{A} w'$.

$\alpha 1$. $(\overline{\xi} z_n, M_\eta z_n)$. В этом случае ветвь z_n поддиаграммы $\mathcal{D}_{v_n}$ проходит через некоторую вершину ε из концевого множества M_{η_ρ}, т.е. $z_n = w_\varepsilon z_n'$ (6), где w_ε – путь из вершины v_n в вершину ε, а z_n' – ветвь поддиаграммы $\mathcal{D}_\varepsilon$. Согласно КЗ.4 в поддиаграмме $\overline{\mathcal{D}}_M$ (а следовательно, и в диаграмме $\mathcal{D}'$) имеется вершина ρ такая, что $\mathcal{D}_\varepsilon I'_f \mathcal{D}_\rho$, т.е. в поддиаграмме $\mathcal{D}_\rho$ существует ветвь z_{n+1} , удовлетворяющая условию ($*n+1$): $\mathbf{A}z'_n f \mathbf{A} z_{n+1}$. Обозначим через $w_{\varepsilon|\rho}$ путь из вершины v_n в вершину ρ , отличающийся от пути w_ε только последней дугой. Поскольку z_n не проходит через вершины вида ξ_{pq} , то начальный путь $y_{n+1} = y_n w_{\varepsilon|\rho}$ в вершину ρ содержится в диаграмме $\mathcal{D}'$. Из (Δn), (6) и ($*n+1$) в силу свойств (f 2) и (f 3) побуквенных отношений получаем ($\Delta n+1$) : $\mathbf{A} w f \mathbf{A} y_{n+1} z_{n+1}$. При этом путь y_{n+1} является таким продолжением пути y_n , что $l y_{n+1} > l y_n$.

$\alpha 2$. ($\xi z_n . \overline{M}_\xi z_n$). В этом случае ветвь z_n поддиаграммы $\mathcal{D}_{v_n}$ можно представить в виде: $z_n = t z'_n$, где t - путь из вершины v_n в некоторую вершину ξ_{ij} , а z'_n - ветвь поддиаграммы $\mathcal{D}_{\xi_{ij}}$, причем z'_n не проходит через какую-либо вершину из концевого множества $M_{\xi_{ij}}$. Согласно определению $\mathbf{K}I_f$-сверточного шага в диаграмме $\mathcal{D}'$ существует путь t' из вершины v_n в вершину η_i , отличающийся от пути t только последней дугой. Поэтому в диаграмме $\mathcal{D}'$ имеется начальный путь $y_{n+1} = y_n t'$ в вершину η_i . Так как ветвь z'_n поддиаграммы $\mathcal{D}_{\xi_{ij}}$ не проходит через вершину из концевого множества $M_{\xi_{ij}}$, то согласно КЗ и ($\mathcal{J}$ 2) в поддиаграмме $\mathcal{D}_{\eta_i}$ диаграммы $\mathcal{D}$ существует ветвь z_{n+1} такая, что $\mathbf{A}z'_n f \mathbf{A} z_{n+1}$ (7), причем z_{n+1} не проходит через вершину из концевого множества M_{η_i} . Поскольку $\mathbf{A}t = \mathbf{A}t'$, и следовательно, $\mathbf{A} z_n = \mathbf{A} t' z'_n$, то из (Δn) и (7) получаем $(\Delta\, n+1)$: $\mathbf{A} w f \mathbf{A} y_{n+1} z_{n+1}$. При этом путь y_{n+1} является продолжением пути y_n , так что $l y_{n+1} > l y_n$.

α3. $(\xi z_n, M_\xi z_n)$, т.е. в этом случае ветвь z_n поддиаграммы $\mathcal{D}_{v_n}$ можно представить в виде: $z_n = t w_\varepsilon z'_n$, где t - путь из вершины v_n в некоторую вершину ξ_{ij} , w_ε - путь из вершины ξ_{ij} в некоторую вершину ε из концевого множества $M_{\xi_{ij}}$, а z'_n - ветвь поддиаграммы $\mathcal{D}_\varepsilon$.

Применив к t , w_ε и z'_n такие же рассуждения, как и в случае 3 к $w_{\xi_{ij}}$, w_ε и z_0 ,мы, во-первых, получим в диаграмме $\mathcal{D}'$ такой путь w_{ε_1} из вершины η_i в некоторую вершину ε_1 из концевого множества M_{η_i} , что будет выполнено условие (I) : $\mathbf{A} w_\varepsilon f \mathbf{A} w_{\varepsilon_1}$. Во-вторых, в диаграмме $\mathcal{D}'$ найдется вершина ρ и такая ветвь z_{n+1} поддиаграммы $\mathcal{D}_\rho$ диаграммы $\mathcal{D}$, для которой будет выполнено условие $(\ast\, n+1)$: $\mathbf{A} z'_n f \mathbf{A} z_{n+1}$.

Дальнейшее доказательство для случая α 3 дословно совпадает с доказательством для случая 3 (начиная со слов "Возможны два случая: $(\bar{\xi}\, w_{\varepsilon_1})$ и $(\xi\, w_{\varepsilon_1})$"), если в нем пути $w_{\xi_{ij}}$, y_1 , z_1 заменить, соответственно, путями t , y_{n+1} и z_{n+1}, а соотношения $(\ast\ \mathrm{I})$ и $(\Delta\ \mathrm{I})$ - соотношениями $(\ast\, n+1)$ и $(\Delta n+1)$.

При этом, как и в случаях α I, α 2 путь y_{n+1} является продолжением пути y_n , так что $l y_{n+1} > l y_n$.

4. Из предыдущего доказательства вытекает, что для некоторых ветвей w может существовать бесконечная последовательность начальных путей y_1 , y_2 ,... диаграммы $\mathcal{D}'$, ведущих

соответственно, в вершины v_1 , v_2 ,... такие, что в поддиаграммах $\mathcal{D}_{v_1}, \mathcal{D}_{v_2}$,... диаграммы $\mathcal{D}$ существуют ветви z_1 , z_2 ,..., удовлетворяющие условиям (Δn) : $\mathbf{A}wf\mathbf{A}y_n z_n$, где $n=1,2,\ldots$ При этом каждый путь y_{n+1} является продолжением пути y_n .

Покажем, что и в этом случае существует ветвь w' диаграммы $\mathcal{D}'$, удовлетворяющая условию: $\mathbf{A}wf\mathbf{A}w'$.

Так как для любого n начальный путь y_{n+1} является продолжением пути y_n , причем $ly_{n+1}>ly_n$, то в диаграмме $\mathcal{D}'$ существует бесконечная ветвь w' такая, что $y_n z_n \xrightarrow[p]{} w'$, где $p(n)=ly_n$. А так как отношение f замкнуто относительно предельного перехода, то из соотношений (Δn) вытекает: $\mathbf{A}wf\mathbf{A}w'$.

Остается показать, что построенное выше соответствие φ между ветвями w и w' диаграмм $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ является сильно-однозначной функцией. Пусть w_1 и w_2 - произвольные ветви диаграммы $\mathcal{D}$, отличающиеся некоторыми дугами. Пусть, например, $w_1=w_0v_0d_{01}z_{01}$, $w_2=w_0v_0d_{02}z_{02}$, где дуги d_{01} и d_{02} различны и ведут, соответственно, в (не обязательно различные) вершины v_1 , v_2 . Здесь w_0 - начальный путь, ведущий в вершину v_0 . Обозначим: $y_{01}=w_0v_0d_{01}$, $y_{02}=$ $=w_0v_0d_{02}$. Поскольку пути y_{01} и y_{02} отличаются только последними дугами, то они проходят через одни и те же вершины, и поэтому любой из случаев 0, I, 2, 3 выполняется одновременно для обоих путей y_{01} , y_{02} .

Если $(\overline{\xi}\, y_{01}, \overline{M}_{2}\, y_{01})$, где $i \in \{1,2\}$, то ветви $w_1' = \varphi w_1$ и $w_2' = \varphi w_2$ представляются в виде: $w_1' = y_{01}' z_{01}'$, $w_2' = y_{02}' z_{02}'$, где начальные пути y_{01}', y_{02}' могут отличаться, соответственно, от путей y_{01}, y_{02} только последними дугами, причем эти дуги у путей y_{01}', y_{02}' различны, поскольку они либо совпадают с дугами d_{01}, d_{02}, либо получены присоединением их к другим вершинам, определяемым $\mathbf{KI}_f$-сверточным шагом. Таким образом в этом случае пути w_1', w_2' отличаются не более далекими дугами, чем пути w_1, w_2, и следовательно, удовлетворяют нужному требованию.

В каждом из случаев 1,2,3 для путей y_{01}, y_{02} один из этих случаев выполняется и для ветвей w_1, w_2 (хотя не обязательно тот же, что и для путей y_{01}, y_{02}). В соответствии с процедурой получения ветвей w_1', w_2', описанной в пунктах 1,2,3, α 1, α 2, α 3 и 4, ветви w_1', w_2' получаются путем продолжения некоторых начал ветвей w_1, w_2 такими путями, которые соответствуют отрезкам ветвей w_1, w_2 в силу отношений I_f или I_f' между некоторыми поддиаграммами диаграммы $\mathcal{D}$. Поскольку такие соответствия являются сильнооднозначными, то различие в дугах ветвей w_1, w_2 будет переноситься и на ветви w_1', w_2' с выполнением условия сильной однозначности.

В разделе 6 мы приведем примеры, иллюстрирующие применение $\mathbf{KI}_f$-сверточных операций к вычислительным деревьям для машин Тьюринга.

5. $Z\Phi$ - свертки.

Пусть Φ - бинарное отношение на множестве диаграмм и $\mathcal{D}$ - диаграмма. Назовем операцией Φ-замены в применении к диаграмме $\mathcal{D}$ замену какой-либо ее висячей полной поддиаграммы $\mathcal{D}_v$ такой диаграммой $\mathcal{D}'_v$, что $\mathcal{D}_v \Phi \mathcal{D}'_v$

Будем обозначать: $\mathcal{D} \xrightarrow[1]{\Phi} \mathcal{D}'$, если диаграмма $\mathcal{D}'$ получена из диаграммы $\mathcal{D}$ путем применения одной операции Φ-замены. Рефлексивное и транзитивное замыкание отношения $\xrightarrow[1]{\Phi}$ обозначим через $\xrightarrow{\Phi}$.

Отношение Φ будем называть квазиконгруенцией, если $\xrightarrow{\Phi} \subseteq \Phi$, т.е. $\mathcal{D} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{D}'$ влечет $\mathcal{D} \Phi \mathcal{D}'$.

Симметричная квазиконгруенция называется конгруенцией.

Очевидно, что всякая квазиконгруенция рефлексивна и транзитивна, и следовательно, всякая конгруенция является отношением эквивалентности.

Легко доказывается следующее:

Предложение 5. Если f - побуквенное отношение, то любое из отношений I_f, Ψ_f, Ω_f, I'_f, Ψ'_f, Ω'_f является квазиконгруенцией.

Конечную композицию операций Φ_1-замены и Φ_2-сверточных шагов назовем $Z_{\Phi_1}\Phi_2$-сверточной операцией, а диаграмму $\mathcal{D}'$, полученную из диаграммы $\mathcal{D}$ с помощью $Z_{\Phi_1}\Phi_2$- сверточной операции, будем называть $Z_{\Phi_1}\Phi_2$- сверткой диаграммы $\mathcal{D}$. В этом случае будем обозначать: $\mathcal{D} \xrightarrow{Z_{\Phi_1}\Phi_2} \mathcal{D}'$.

Вместо $Z_\Phi \Phi$ будем писать $Z\Phi$.

Ясно, что если отношение Φ_1 - квазиконгруенция, а отношение Φ_2 - устойчивое, то $\underset{\sim}{Z_{\Phi_1\Phi_2}} \subseteq \Phi_1 \cup \Phi_2$. Поэтому, если f - побуквенное отношение, замкнутое относительно предельного перехода, то в силу теоремы 3 : $\underset{\sim}{Z\Omega_f} \subseteq \Omega_f$

<u>Теорема 5</u>. Если побуквенное отношение f таково, что любое множество $Q \subseteq \mathbf{A}^{\circledast}$ имеет конечный f -базис, то для любой $\mathbf{A}, k$ -диаграммы существует конечная $Z_{\Psi_f} I_f$ -свертка.

↑ Пусть $\mathcal{D}$ - произвольная $\mathbf{A}, k$-диаграмма и побуквенное отношение f удовлетворяет условию теоремы. Тогда, поскольку множество $\mathbf{A}W\mathcal{D}$ имеет конечный f -базис, то существует начальная субдиаграмма $\mathcal{D}'$ диаграммы $\mathcal{D}$, множество всех ветвей которой конечно и которая удовлетворяет условию: $\mathcal{D}\Psi_f\mathcal{D}'$. Применив к диаграмме $\mathcal{D}$ операцию Ψ_f- замены, мы получим диаграмму $\mathcal{D}'$. Так как множество всех ветвей диаграммы $\mathcal{D}'$ конечно, то любая ее ветвь, начиная с некоторого места, не содержит ветвящихся вершин (т.е. вершин, положительная степень которых больше 1). Это означает, что в диаграмме $\mathcal{D}'$ существует конечное сечение V такое, что для любой вершины v из V поддиаграмма $\mathcal{D}'_v$ диаграммы $\mathcal{D}'$ состоит из одной ветви.

Рассмотрим для произвольного сверхслова α из $\mathbf{A}^{\infty}$ множество $T_\alpha = \{\alpha[i,\infty] : i \in N'\}$, где $\alpha[i,\infty] = \alpha[i]\alpha[i+1]$ .... Поскольку это множество имеет конечный f -базис, то существуют такие натуральные числа m, n, что $m < n$ и $\alpha[n,\infty] f \alpha[m,\infty]$. Это означает, что для любой поддиаграммы $\mathcal{D}'_v$, где $v \in V$, существуют такие вершины v' и v'', что $\mathcal{D}'_{v'} I_f \mathcal{D}'_{v''}$, поскольку каждая такая поддиаграмма $\mathcal{D}'_v$ состоит из одной бесконечной ветви и потому $\mathbf{A}W\mathcal{D}'_v$ является сверхсловом в алфавите $\mathbf{A}$. Очевидно, что множество V' вершин v' образует конечное сечение диаграммы $\mathcal{D}'$, удовлетворяющее условиям (I) и (2) теоремы I, и следовательно, для диаграммы $\mathcal{D}'$ существует конечная I_f-свертка, т.е. для диаграммы $\mathcal{D}$ существует конечная $Z_{\Psi_f} I_f$-свертка. ↓

Из доказательства этой теоремы непосредственно видно, что применяемые там I_f-сверточные шаги удовлетворяют условию б) теоремы 3, так что мы получаем

<u>Следствие</u>. Если побуквенное отношение f таково, что любое множество $Q \subseteq \mathbf{A}^{\circledast}$ имеет конечный f-базис, то для любой $\mathbf{A}, k$-диаграммы $\mathcal{D}$ существует конечная $Z_{\Psi_f} I_f$-свертка (и следовательно, $Z\Psi_f$-свертка) $\mathcal{D}'$, удовлетворяющая условию: $\mathcal{D}\Psi_f\mathcal{D}'$.

Согласно теореме 3.I из работы [2] таким отношением является отношение h, так что любая $\mathbf{A}, k$-диаграмма $\mathcal{D}$ имеет конечную $Z\Psi_h$-свертку $\mathcal{D}'$, удовлетворяющую условию: $\mathcal{D}\Psi_h\mathcal{D}'$.

6. <u>Примеры</u>.

Как и в [2] мы сопоставляем каждой машине Тьюринга вычислительное дерево, корнем которого является кратная конфигурация $s_1 x$, где s_1 - начальное состояние, а x - переменная, принимающая значения из ленточного алфавита $Б = \{0, 1, \ldots \ldots k-1\}$.

Если s_i - состояние, $a \in Б$, то двубуквенные слова вида $s_i a$ или $s_i x$ называются ядрами (соответственно, простыми или кратными).

Конфигурации вида $\alpha s_i a \beta$, где $\alpha, \beta \in Б^*$, называются простыми, а конфигурации вида $\alpha S_i x$ и $S_i x \alpha$ - кратными (других конфигураций нет). Каждая вершина ξ вычислительного дерева, являющаяся простой конфигурацией, имеет не более одного непосредственного последователя, который совпадает с результатом применения к конфигурации ξ соответствующей команды машины Тьюринга (т.е. команды с таким же ядром,что и у конфигурации ξ) если такая команда имеется. Если же ξ - кратная конфигурация, то она имеет не более k непосредственных последователей, которые совпадают с результатами применения к простым конфигурациям, полученным из ξ подстановками вместо переменной x всевозможных букв алфавита $Б$. При этом a- последователем конфигурации ξ является результат применения соответствующей команды к такой конфигурации, которая получается из ξ подстановкой вместо x буквы a из $Б$.

Вычислительные деревья машин Тьюринга можно рассматривать как Ξ, k -диаграммы, где Ξ - множество всех конфигураций. Если же необходимо рассматривать вычислительные деревья как $\mathbf{A}, k$ -диаграммы,где алфавит $\mathbf{A}$ конечен, то можно считать, что каждой вершине ξ приписано ядро $Я\xi$ конфигурации ξ. В этом случае каждое вычислительное дерево является $Я, k$- диаграммой (точнее $Я, k$- деревом), где $Я$ - конечный алфавит, состоящий из всех ядер рассматриваемой машины.

Получая конечные свертки вычислительных деревьев с помощью операций, сильно сохраняющих такие свойства, как $\mathbf{O}$, $\mathbf{Б}$, $\mathbf{C}_{s_i a}$ и т.п. (т.е. вообще свойства, разрешимые на конечных диаграммах), мы тем самым получаем разрешающую процедуру для этих свойств вычислительных деревьев (а следовательно, и самих машин). Проблемы разрешения упомянутых свойств называются, соответственно, проблемой непустоты, проблемой бессмертия и проблемой существенности команды с ядром $s_i a$. Все эти проблемы в классе всех машин алгоритмически неразрешимы.

Проиллюстрируем применение $\mathbf{KL}_k$-сверток к вычислительным деревьям машин Тьюринга на двух примерах. Предварительно определим ряд понятий.

Расширением простой конфигурации ξ называем всякую конфигурацию вида $\alpha\xi\beta$, где $\alpha,\beta\in Б^*$; если $\xi = \gamma s_i x$, то расширениями ξ являются конфигурации вида $\alpha\gamma s_i x$, либо $\alpha\gamma s_i\beta$, где $\alpha\in Б^*$, $\beta\in Б^+$, если же $\xi = s_i x\gamma$, то расширениями ξ называются конфигурации вида $s_i x\gamma\beta$ или $\alpha s_i a\gamma\beta$, где $\alpha,\beta\in Б^*, a\in Б$. Мы обозначаем: $\xi\subseteq\eta$, если конфигурация η является расширением конфигурации ξ .

Для всякой машины Тьюринга и произвольной конфигурации ξ мы обозначаем через $\mathcal{D}_\xi$ вычислительное дерево с корнем ξ

Отношения $I_=$ и $I'_=$ на множестве $Я, k$ -диаграмм будем называть, соответственно, ядерным изоморфизмом и ядерным эндоморфизмом и будем обозначать их I и I'.

Очевидно следующее

<u>Предложение 6.</u> Для любой машины Тьюринга, если $\xi\subseteq\eta$, то $\mathcal{D}_\eta I'\mathcal{D}_\xi$

Пусть $\mathcal{D}$ - вычислительное дерево, α - слово в ленточном алфавите $Б$. Путь $\xi_1 d_1 \xi_2 d_2 \ldots \xi_{n-1} d_{n-1}\xi_n$ в дереве

$\mathcal{D}$ назовем α - путем, если в последовательности конфигураций $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ содержится ровно $l\alpha$ кратных конфигураций, и для $i = 1, 2, \ldots,$ непосредственный последователь i-ой по порядку кратной конфигурации в этом пути является $\alpha[i]$- последователем. В таком случае конфигурацию ξ_n будем называть α-последователем конфигурации ξ_1. Если при этом конфигурация ξ_{n-1} является кратной, то ξ_n будем называть непосредственным α - последователем конфигурации ξ_1.

Если $Q \subseteq Б^*$, то (непосредственным) Q- последователем конфигурации ξ назовем всякий ее (непосредственный) α - последователь, где $\alpha \in Q$.

Q - последователи корня вычислительного дерева будем называть Q- вершинами.

Заметим, что любая кратная конфигурация ξ для любого слова α из $Б^*$ имеет не более одного непосредственного α - последователя, но может иметь несколько α - последователей, ибо, если простая конфигурация η является α - последователем конфигурации ξ, то непосредственный последователь конфигурации η также является α - последователем конфигурации ξ.

<u>Пример I</u>. Рассмотрим машину Тьюринга, умножающую числа в унарной системе. Такую машину с ленточным алфавитом $Б = \{0, I, 2, 3, 4\}$ задает таблица 2. Эта машина конфигурации вида $0I^m 2 S_1 I^n 0$ перерабатывает в конфигурации $04^{mn} I^m 23^n S_0 0$

(где S_0 - заключительное состояние). Соответствующее вычислительное дерево $\mathcal{D}_{s_1x}$ изображено на рисунке 4. Здесь обведены овалами и не имеют последователей такие конфигурации, которые

	0	1	2	3	4
s_1	s_0	$3Ls_3$	Ls_3	Rs_1	Rs_1
s_2	$4Rs_1$	Ls_2	Ls_1	Ls_2	Ls_2
s_3	—	Rs_3	Rs_1	$1Ls_3$	Rs_3

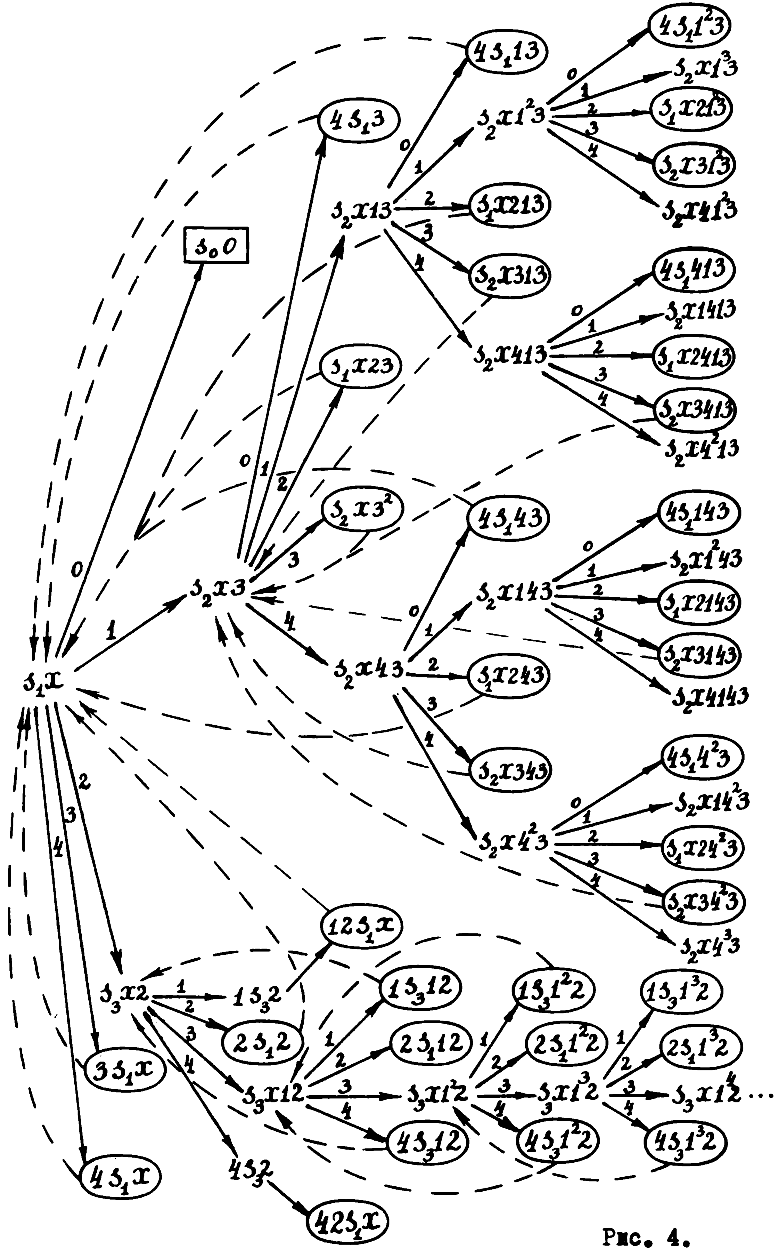
Таблица 2.

являются расширениями других конфигураций, указанных штриховыми стрелками (в некоторых очевидных случаях стрелки не проведены).

Рассмотрим сначала поддерево $\mathcal{D}_{s_2x3}$, изображенное на рисунке 5, и покажем, что к некоторому набору его поддеревьев применим $\mathbf{KI}_h$-сверточный шаг (учитывая и корень s_1x полного дерева).

Пусть $\eta_1 = s_2x\,13$, $\eta_2 = s_2x\,43$; $\xi_{11} = s_2x\,1^2 3$, $\xi_{12} = s_2x\,143$; $\xi_{21} = s_2x\,413$, $\xi_{22} = s_2x\,4^2 3$. Здесь ξ_{11} и ξ_{12} являются I-последователями, а ξ_{21} и ξ_{22} - 4-последователями конфигураций η_1 и η_2 . Очевидно, что условия KI и K2 выполняются.

В качестве концевых множеств M_{η_i} и $M_{\xi_{ij}}$ поддеревьев $\widehat{\mathcal{D}}_{\eta_i}$, $\widehat{\mathcal{D}}_{\xi_{ij}}$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$, возьмем множества непосредственных $\{1,4\}^* \{0,2,3\}$ - последователей, соответственно, вершин η_i и ξ_{ij}. Поскольку команды с ядрами $S_2 1$ и $S_2 4$ содер-



$s_0 0$
s_1x
s_2x3
$4s_1 3$
s_2x13
$4s_1 13$
$s_2x1^2 3$
$4s_1 1^2 3$
$s_2x1^3 3$
$s_1x21^2 3$
$s_2x31^2 3$
$s_2x41^2 3$
s_1x213
s_2x313
s_2x413
$4s_1 413$
s_2x1413
s_1x2413
s_2x3413
$s_2x4^2 13$
s_1x23
s_2x3^2
$4s_1 43$
s_2x43
s_2x143
$4s_1 143$
$s_2x1^2 43$
s_1x2143
s_2x3143
s_2x4143
s_1x243
s_2x343
$s_2x4^2 3$
$4s_1 4^2 3$
$s_2x14^2 3$
$s_1x24^2 3$
$s_2x34^2 3$
$s_2x4^3 3$
$12s_1x$
s_3x2
$1s_3 2$
$2s_1 2$
$3s_1x$
$4s_1x$
$4s_3 2$
$42s_1x$
s_3x12
$1s_3 12$
$2s_1 12$
$4s_3 12$
$s_3x1^2 2$
$1s_3 1^2 2$
$2s_1 1^2 2$
$4s_3 1^2 2$
$s_3x1^3 2$
$1s_3 1^3 2$
$2s_1 1^3 2$
$4s_3 1^3 2$
$s_3x1^4 2$ ...

Рис. 4.

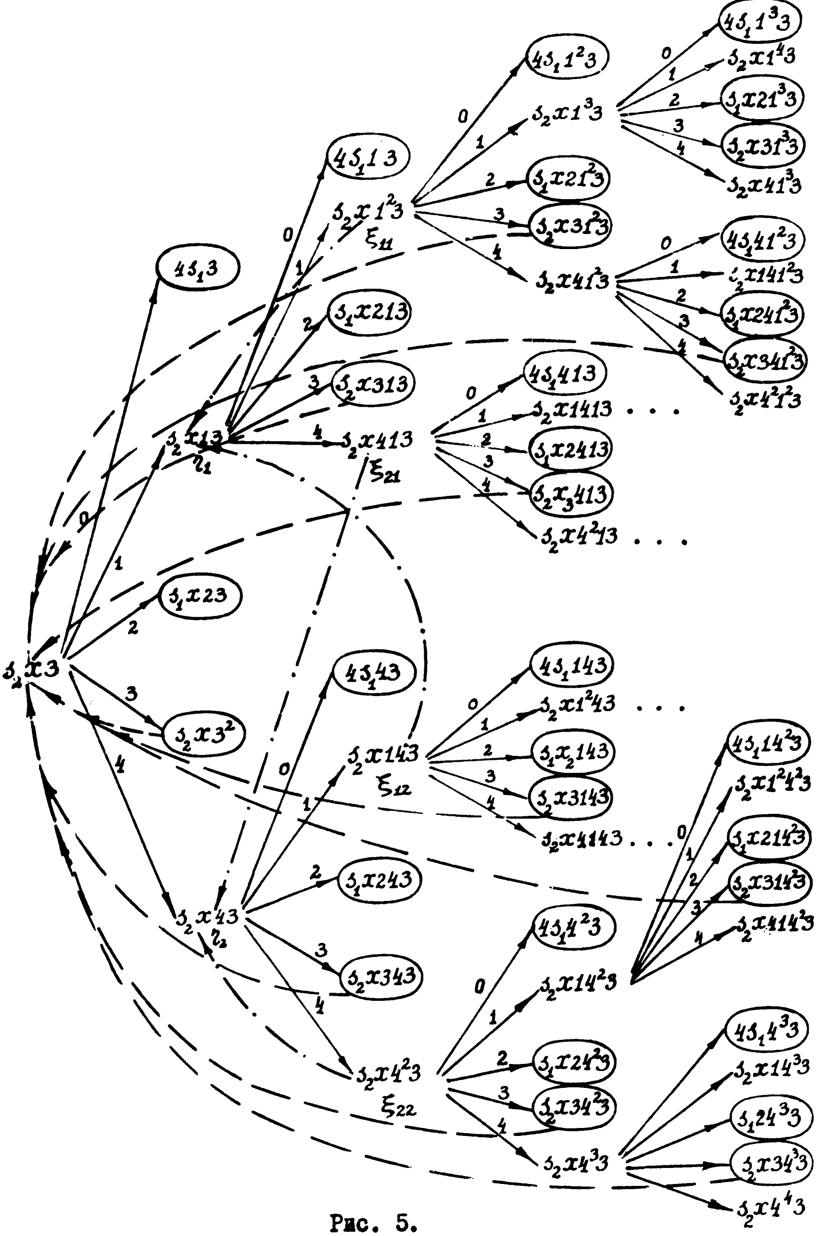


Рис. 5.

жат сдвиг влево и не изменяют ни состояний, ни ленточных букв, то для любого α из $\{1,4\}^*$ начальные α-пути поддеревьев $\mathcal{D}_{\eta_i}$ и $\mathcal{D}_{\xi_{ij}}$ ядерно изоморфны, ибо все $\{1,4\}^*$ - вершины имеют одинаковые ядра $S_2\mathcal{X}$. При этом все непосредственные $\{1,4\}^*\{1\}$ - вершины имеют вид $S_2\mathcal{X}1\alpha$, а все непосредственные $\{1,4\}^*\{4\}$ -вершины имеют вид $S_2\mathcal{X}4\alpha$. Согласно таблице 2 отсюда следует, что для любой буквы a из $Б$ непосредственные $\{1,4\}^*\{a\}$ - вершины поддеревьев $\hat{\mathcal{D}}_{\eta_i}$ и $\hat{\mathcal{D}}_{\xi_{ij}}$ имеют одинаковые ядра. А так как все неконцевые вершины этих поддеревьев кратные и являются $\{1,4\}^*$- вершинами, то это означает, что поддеревья $\hat{\mathcal{D}}_{\eta_i}$ и $\hat{\mathcal{D}}_{\xi_{ij}}$ ядерно изоморфны, т.е. выполняется условие ($\mathcal{J}$ 1) из определения отношения $\hat{I}_f$. При этом ясно, что выполняется и условие ($\mathcal{J}$ 2), т.е. выполнено условие К3: $\mathcal{D}_{\xi_{ij}}\hat{I}\mathcal{D}_{\eta_i}$, где $1\leqslant i,j\leqslant 2$. Выполнение условий К3.1, К3.2 и К3.3 очевидно.

Так как все непосредственные $\{1,4\}^*$- вершины поддерева $\mathcal{D}_{S_2\mathcal{X}3}$ имеют ядро $S_2\mathcal{X}$, то согласно таблице 2 все непосредственные $\{1,4\}^*\{0,2\}$ - вершины содержат состояние S_1, и следовательно, являются расширениями корня $S_1\mathcal{X}$, т.е. для соответствующих поддеревьев выполняются отношение I'. Аналогично устанавливается, что все непосредственные $\{1,4\}^*\{3\}$-вершины имеют вид $S_2\mathcal{X}3\alpha$ и потому являются расширениями вершины $S_2\mathcal{X}3$. Таким образом, выполняется условие К3.4, где вершинами ρ являются либо $S_1\mathcal{X}$, либо $S_2\mathcal{X}3$. Отсюда непосредственно вытекает и выполнение условия К3.4.1.

Итак, к набору поддеревьев с корнями $S_2\mathcal{X}13$, $S_2\mathcal{X}43$ и $S_2\mathcal{X}1^23$, $S_2\mathcal{X}143$, $S_2\mathcal{X}413$, $S_2\mathcal{X}4^23$ применим $K1$-сверточный шаг.

Рассмотрим теперь поддерево $\mathcal{D}_{S_3 x 2}$, изображенное на рисунке 6, и покажем, что к поддеревьям с корнями $\eta = S_3 x I2$ и $\xi = S_3 x I^2 2$ применим KI_h-сверточный шаг.

Сначала заметим, что поскольку команда с ядром $S_3 3$ не изменяет состояния, содержит левый сдвиг и заменяет букву 3 на букву I, то любой $\{3\}^*$ - последователь вершины η (вершины ξ) имеет вид $S_3 x I^n 2$, где $n \geq 2$ $(n \geq 3)$. Далее, поскольку команда с ядром $S_3 I$ не изменяет состояния и буквы и содержит сдвиг вправо, то $\{3\}^*\{I\}$-последователи вершин η и ξ имеют вид $I^m S_3 I^n 2$, где $n \geq 0$, либо (самый последний) - $I^m 2 S_1 x$, т.е. для всякого α из $\{3\}^*\{I\}$ один из α- последователей конфигураций η и ξ имеет вид $I^m S_3 I2$ и потому является расширением конфигурации $S_3 x 2$. Аналогичным образом получаем, что $\{3\}^*\{4\}$- последователи конфигураций η и ξ имеют вид $4I^m S_3 I^n 2$, где $n \geq 0$, либо - $4I^m 2 S_1 x$, т.е. для всякого α из $\{3\}^*\{4\}$ один из α - последователей конфигураций η и ξ имеет вид $4I^n S_3 I2$, и следовательно, также является расширением конфигурации $S_3 x 2$. Поскольку, кроме того, для любого α из $Б^*$ 2-последователь конфигурации $S_3 x \alpha$ имеет вид $2 S_1 \alpha$, то взяв в качестве концевых множеств M_η и M_ξ множества тех $\{3\}^*\{I,2,4\}$-последователей вершин η и ξ, которые имеют вид $I^n S_3 I2$, $4I^n S_3 I2$ или $2 S_1 I^n 2$, мы получим такие поддеревья $\widehat{\mathcal{D}}_\eta$ и $\widehat{\mathcal{D}}_\xi$, для которых выполняются условия К3 и К3.4, где в качестве f служит отношение h, а вершинами ρ являются вершины $S_3 x 2$ и $S_1 x$. Действительно, $3^n a$ - пути поддеревьев $\widehat{\mathcal{D}}_\eta$ и $\widehat{\mathcal{D}}_\xi$

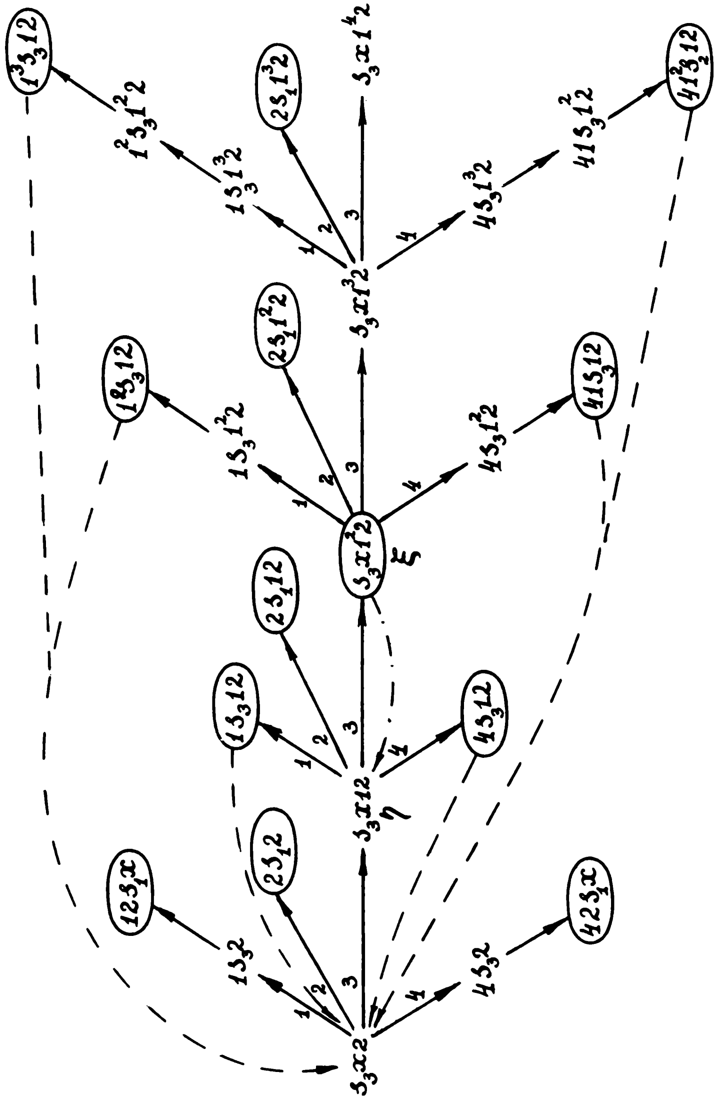


Рис. 6.

где $a \in \{I,4\}$, отличаются только тем, что в поддереве $\widehat{\mathcal{D}}_\xi$ такой путь имеет на одну конфигурацию с ядром $s_3 I$ больше, чем в поддереве $\widehat{\mathcal{D}}_\eta$. Поэтому ясно, что последовательности ядер для таких путей находятся в отношении h . Последовательности же ядер 3^n - путей, а также $3^n 2$ - путей в обоих поддеревьях совпадают.

Остальные условия KI, K2, K3.I, K3.2, K3.3 и K3.4.I в данном случае тривиальны.

Итак, к поддеревьям $\mathcal{D}_\eta = \mathcal{D}_{s_3 x I 2}$ и $\mathcal{D}_\xi = \mathcal{D}_{s_3 x I^2 2}$ применим $\mathbf{KI}_h$- сверточный шаг. В результате применения этого $\mathbf{KI}_h$- сверточного шага, описанного выше $\mathbf{KI}$- сверточного шага, а также I'- сверточных шагов к поддеревьям, корни которых содержат состояние s_1 , мы получаем конечную $\mathbf{KI}_h$-свертку (поскольку $I \subseteq I_h$), изображенную на рисунке 7.

Пример 2. Таблица 3 задает машину Тьюринга с ленточным алфавитом $Б = \{0,I,2,3\}$, которая переводит числа из унарной системы в позиционную двоичную систему, а именно, конфигурации вида $3 s_1 2^m I 3^{[\log_2 m]+1}$ она перерабатывает в конфигурации вида $3 s_0 0^m I a_0 a_1 \ldots a_p$, где $a_i \in \{0,I\}$, $i = 1,\ldots,p$, и слово $a_0 a_1 \ldots a_p$ является двоичным представлением числа m , т.е. $m = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \ldots + a_p 2^p$. Если считать букву 3 пустым символом, то в обычном смысле можно сказать, что эта машина переводит конфигурацию $s_1 2^m I$ в конфигурацию

$s_0 0^m I a_0 a_1 \ldots a_p$.

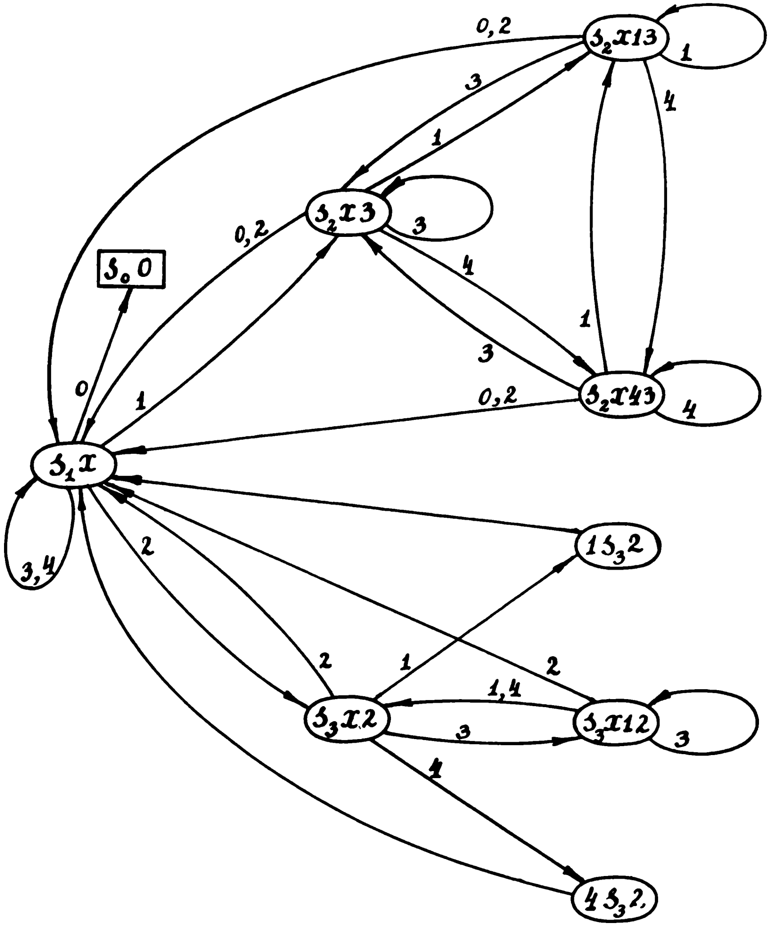

S_2x13
0,2
1
3
1
4
S_2x3
3
0,2
$S_0\,0$
4
1
3
0
1
0,2
S_2x43
4
S_1x
3,4
2
$1S_32$
2
1
2
1,4
S_3x2
S_3x12
3
3
4
$4S_32$

Рис. 7.

	0	1	2	3
S_1	RS_1	RS_1	ORS_2	OLS_3
S_2	RS_2	RS_2	RS_1	$1LS_3$
S_3	LS_3	LS_3	LS_4	RS_0
S_4	LS_4	—	LS_4	RS_1

Таблица 3.

На рисунке 8 изображено соответствующее вычислительное дерево $\mathcal{D}_{S_1 x}$. Для этого дерева мы также получим конечную KI_h-свертку.

Рассмотрим сначала поддерево $\mathcal{D}_{OS_2 x}$, изображенное на рисунке 9. Пусть $\eta = OIS_2 x$, $\xi = OI^2 S_2 x$. Покажем, что к набору поддеревьев $\mathcal{D}_\eta$, $\mathcal{D}_\xi$ применим KI_h-сверточный шаг. Для этого отметим некоторые свойства поддеревьев $\mathcal{D}_\eta$, $\mathcal{D}_\xi$, легко получаемые из особенностей команд таблицы 3.

(I) Поскольку команда с ядром $S_2 I$ не изменяет состояние и букву и содержит сдвиг вправо, то для любого натурального числа m I^m- последователи вершин $\eta = OIS_2 x$ и $\xi = OI^2 S_2 x$ имеют вид, соответственно, $OI^{m+1} S_2 x$ и $OI^{m+2} S_2 x$, и следовательно, I^m- пути из вершин η и ξ ядерно изоморфны.

(2) Всякий непосредственный $\{I\}^*\{0\}$- последователь вершин η и ξ имеет вид $\alpha OS_2 x$, и следовательно, является расширением конфигурации $OS_2 x$. Кроме того, отсюда следует,

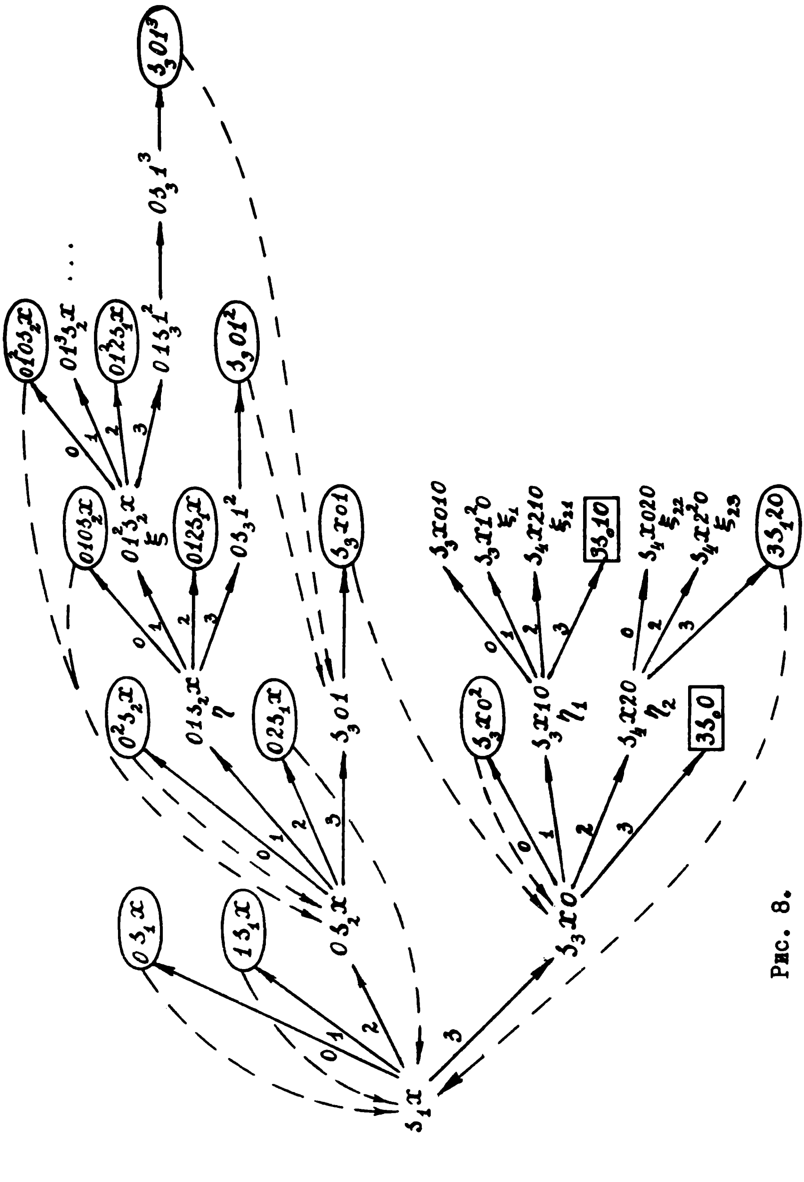


Рис. 8.

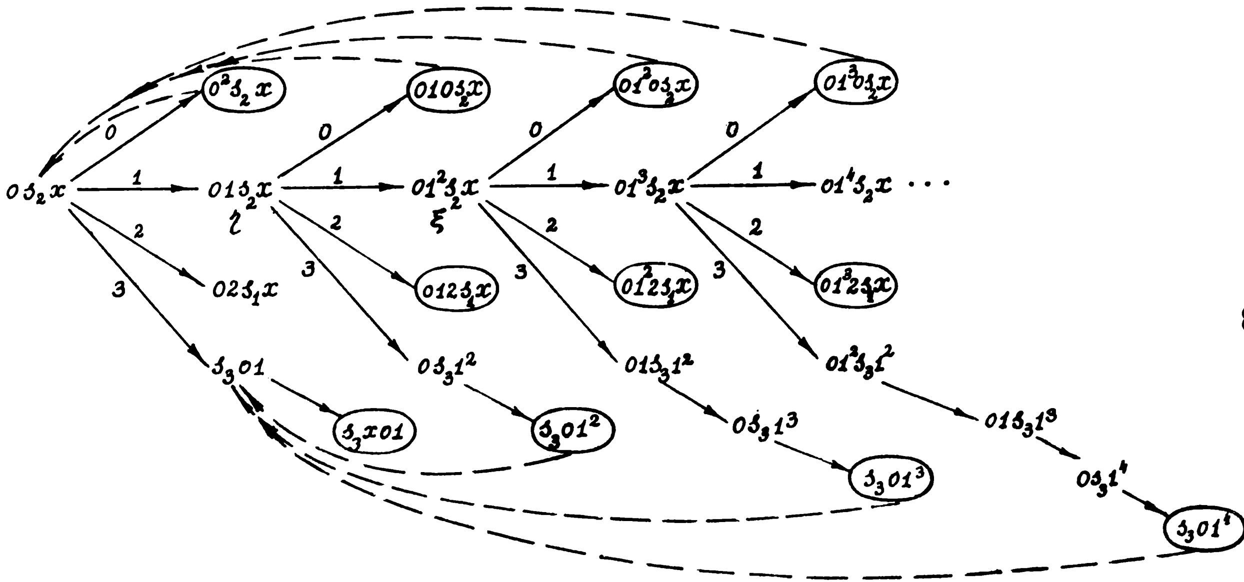


Рис. 9.

что для любого α из $\{I\}^*\{0\}$ α- пути из вершин η и ξ ядерно изоморфны.

(3) Всякий непосредственный $\{I\}^*\{2\}$- последователь вершин η и ξ содержит состояние S_1 и потому является расширением корня $S_1 x$. Ясно также, что для любого α из множества $\{I\}^*\{2\}$ α- пути из вершин η и ξ ядерно изоморфны.

(4) Для любого m непосредственные $I^m 3$ - последователи вершин η и ξ имеют, соответственно, вид $0I^m S_3 I^2$ и $0I^{m+1} S_3 I^2$, а так как команды с ядрами $S_3 I$ и $S_3 0$ содержат сдвиг влево и не изменяют состояние и букву, то среди $I^m 3$ - последователей вершин η и ξ имеются конфигурации вида $S_3 0I^{m+2}$, соответственно, $S_3 0I^{m+3}$, которые являются расширениями конфигурации $S_3 0I$, содержащейся в поддереве $\mathcal{D}_{0S_2x} - \mathcal{D}_\eta$. При этом цепочки ядер $I^m 3$-путей из вершин ξ и η , соответственно, в вершины $S_3 0I^{m+3}$ и $S_3 0I^{m+2}$ имеют вид: $(S_2 x)^m (S_3 I)^{m+2} S_3 0$ и $(S_2 x)^m (S_3 I)^{m+1} S_3 0$, и следовательно,находятся в отношении h .

Если взять в качестве концевых множеств M_η , M_ξ поддеревьев $\widehat{\mathcal{D}}_\eta$, $\widehat{\mathcal{D}}_\xi$ множества всех непосредственных $\{I\}^*$ $\{0,2\}$- последователей вершин η и ξ и тех $\{I\}^*\{3\}$- последователей этих вершин, которые имеют вид $S_3 0I^m$, то из (I)-(4) будет следовать условие К3 : $\mathcal{D}_\xi \widehat{I}_h \mathcal{D}_\eta$. Условия КI, К2, К3.I, К3.2 в данном случае тривиальны. Условия К3.3, К3.4 и К3.4.I также легко проверяются с помощью свойств (I)-(4). Таким образом, к поддеревьям $\mathcal{D}_\eta$, $\mathcal{D}_\xi$ применим $\mathbf{KI}_h$- сверточный шаг.

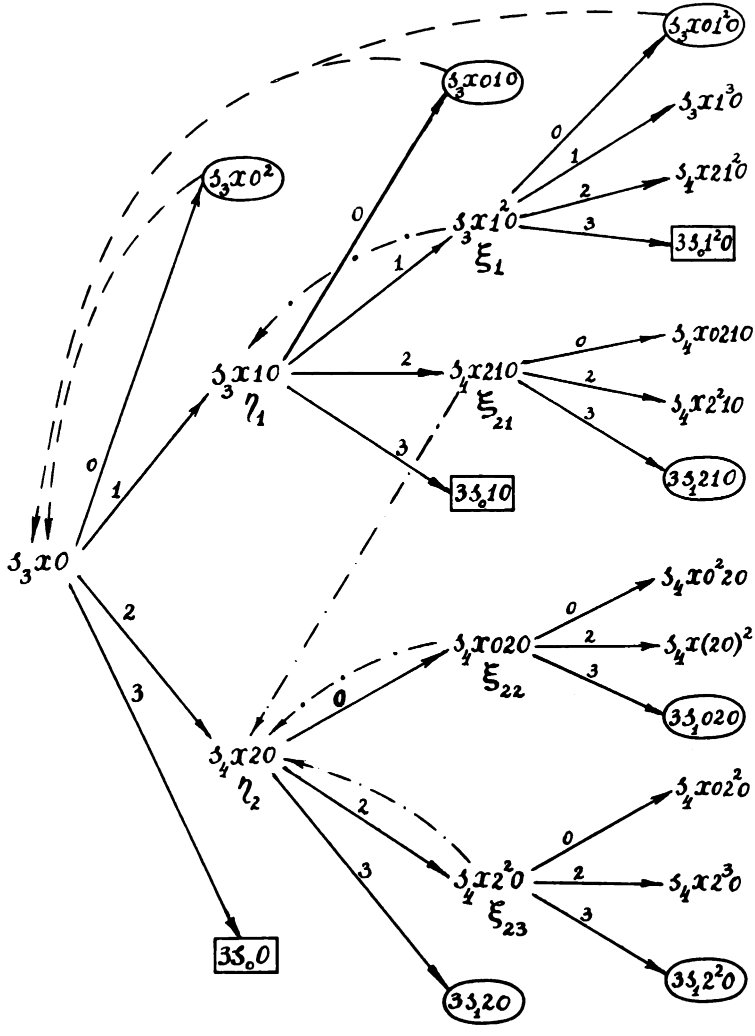
Рассмотрим теперь поддеревья с корнями $\eta_1 = S_3 x I0$, $\eta_2 = S_4 x 20$, $\xi_1 = S_3 x I^2 0$, $\xi_{21} = S_4 x 2I0$, $\xi_{22} = S_4 x 020$, $\xi_{23} = S_4 x 2^2 0$ (см. рисунок I0) и покажем, что к ним также применим KI_h- сверточный шаг.

Возьмем в качестве концевых множеств M_{η_1}, M_{ξ_1} поддеревьев $\widehat{\mathcal{D}}_{\eta_1}$, $\widehat{\mathcal{D}}_{\xi_1}$ множества непосредственных $\{I\}^*(\{0\} \cup \{2\}\{0,2\}^*\{3\})$- последователей, соответственно, вершин η_1, ξ_1.

Как и в предыдущем случае нетрудно убедиться, что $\mathcal{D}_{\xi_1} \hat{T} \mathcal{D}_{\eta_1}$, причем все вершины из концевых множеств M_{η_1}, M_{ξ_1} являются расширениями либо корня $S_1 x$ либо вершины $S_3 x 0$.

В качестве M_{η_2} и $M_{\xi_{2i}}$, где $i = 1,2,3$, возьмем множества непосредственных $\{0,2\}^*\{3\}$- последователей, соответственно, вершин η_2 и ξ_{2i}. Здесь также легко установить, что $\mathcal{D}_{\xi_{2i}} \hat{T} \mathcal{D}_{\eta_2}$, причем все вершины из концевых множеств M_{η_2} и $M_{\xi_{2i}}$ являются расширениями корня $S_1 x$. Таким образом, для рассматриваемого набора поддеревьев выполняются условия К3, К3.4 и К3.4.I. Условия КI, К2, К3.I, К3.2 в этом случае тривиальны, а условие К3.3 непосредственно вытекает из определения концевых множеств и того факта, что вершина ξ_{21} является 2-последователем вершины η_1. Итак, к набору поддеревьев с корнями η_1, η_2, ξ_1, ξ_{21}, ξ_{22}, ξ_{23} применим KI-сверточный шаг.

В результате применения двух KI_h-сверточных шагов и шести I'-сверточных шагов (не считая тех, которые входят в состав KI_h-сверточных шагов - см. рисунок 8) мы получаем конечную KI_h-свертку дерева $\mathcal{D}_{S_1 x}$, изображенного на рисунке II.



$ʒ_3x0$
$ʒ_3x0^2$
$ʒ_3x10$
η_1
$ʒ_4x20$
η_2
$3ʒ_0 0$
$ʒ_3x010$
$ʒ_3x1^20$
ξ_1
$ʒ_4x210$
ξ_{21}
$3ʒ_0 10$
$ʒ_4x020$
ξ_{22}
$ʒ_4x2^20$
ξ_{23}
$3ʒ_1 20$
$ʒ_3x01^20$
$ʒ_3x1^30$
$ʒ_4x21^20$
$3ʒ_0 1^20$
$ʒ_4x0210$
$ʒ_4x2^210$
$3ʒ_1 210$
$ʒ_4x0^220$
$ʒ_4x(20)^2$
$3ʒ_1 020$
$ʒ_4x02^20$
$ʒ_4x2^30$
$3ʒ_1 2^20$

Рис. IO.

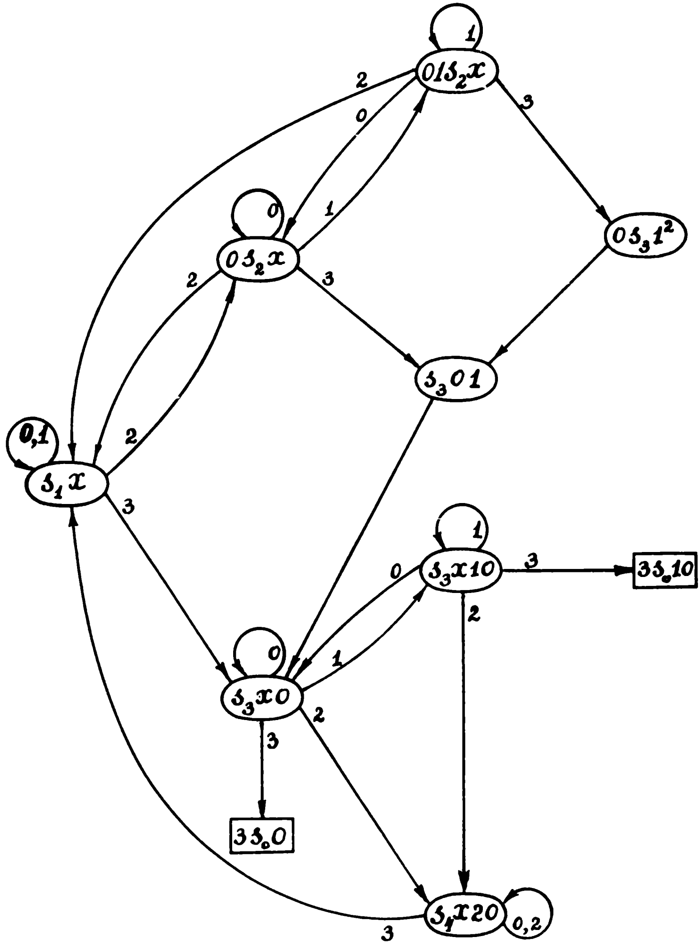


Рис. II.

Литература

1. Янов Ю.И. О некоторых семантических характеристиках машин Тьюринга. Доклады АН СССР, т. 224, № 2, 1975, 301-304.
2. Янов Ю.И. Метод сверток для разрешения свойств формальных систем. Препринт ИПМ № II за 1977 год.

Ю.И. Янов. "Несколько теорем о свертках".
Редактор В.М. Храпченко. Корректор Ю.И. Янов.

Подписано к печати 25.09.78г. № Т-17288. Заказ №5016.
Тираж 150 экз. Формат бумаги 60 X 90, 1/16.
055 (02)2 Объем 3,0 уч. изд. л. Цена 22 коп.

© Отпечатано на ротапринтах в Институте прикладной математики АН СССР
Москва, Миусская пл. 4.

Адрес: СССР, 125047, Москва-47, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, ОНТИ.

Adress: USSR, I25047, Moscow A-47, Miusskaya Sq.4, the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Ac.of Sc., the USSR, Information Bureau.

Цена 22 коп.