Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова

ОБОБЩЕННЫЙ АЛГОРИТМ ОТОЖДЕСТВЛЕНИЯ
ДЛЯ ЯЗЫКА Р Е Ф А Л

Курсовая работа студента
МГУ факультета ВМК
409 группы Абрамова С.М.

Научные руководители:
Кондратьев Н.В.,
Романенко С.А.

Москва, 1979

Содержание.

В работе [I] описан ~~определенный~~ обобщенный алгоритм отождествления, который позволяет представить множество $\mathcal{E}_e \cap \mathcal{E}_t$ (где $\mathcal{E}_e$ - e - выражение, $\mathcal{E}_t$ - типовое выражение) в виде конечного объединения типовых выражений. Этот алгоритм послужил базой для создания мощной системы эквивалентных преобразований алгоритмов написанных на ограниченном РЕФАЛе. Однако, эту систему можно улучшить, если обобщить понятие класса объектных выражений таким образом, чтобы не только пересечение двух классов но и их разность были бы предсттавимы в виде оъединения конечного числа классов.

В данной работе описаны обобщенное понятие класса и соответствующий обобщенный алгоритм отождествления, благодаря которому можно находить представления пересечения и разности двух классов в виде конечного объединения классов.

I. Выражения.

Предлагаемые ~~выражения~~ дополнения в ограниченный РЕФАЛ не затрагивают основных понятий языка: знак, объектный знак, рефал-машина, символ. Поэтому эти понятия здесь не будут определяться. Их определения можно найти в работе [I] . К собственным знакам ограниченного РЕФАЛа добавим два новых знака:

t - признак переменной терма,

v - признак переменной непустого выражения.

<u>Определение I.I</u>

<переменная> ::= s <индекс>|t<индекс>|e<индекс>|v<индекс>

<индекс> ::= <объектный знак>

Назовем переменные вида

s<индекс> - переменной символа или s - переменной,

t<индекс> - переменной терма или t - переменной,

e<индекс> - переменной выражения или e - переменной,

v<индекс> - переменной непустого выражения или v- переменной. Вставка 1

<u>Определение I.2</u>

<выражение> ::=| <терм> <выражение>

<терм> :: = <символ>|(<выражение>)|k<выражение>$\perp$|

<переменная> постараться уместить

Множество всех выражений обозначим через ε .

Как обычно будем считать,что один и тот же индекс в выражении не может использоваться у переменных с разными признаками.Это несущественное ограничение даёт возможность полностью определять переменную по её индексу.

<u>Определение I.3</u>

Термы вида e<индекс> и v<индекс> назовем мягкими. Термы вида k<выражение>$\perp$ будем называть конкретизационными или просто k -термами. Жестким термом назовем терм, который не является мягким и не является k -термом.

Таким образом,любой терм либо мягкий,либо жесткий,либо конкретизационный.

Определение I.4

Выражение не содержащее знаков k назовем типовым. Множество всех типовых выражений обозначим через $\mathcal{E}_t$.

Определение I.5

Типовое выражение назовем ℓ - выражением, если для него выполнены два условия

(I) ни одна t -, e -, ϑ - переменная не входит в него более одного раза.

(2) ни одно его ~~выражение~~ подвыражение не содержит более одного мягкого терма на нулевом уровне скобочной структуры.

Множество всех ℓ -выражений обозначим через $\mathcal{E}_\ell$.

Теорема I.I

Любое подвыражение типового выражения является типовым выражением.

Любое подвыражение ℓ - выраженией является ℓ - выражением.

Доказательство.

Первое утверждение теоремы следует из определения I.4. Второе утверждение следует из первого и из определения I.5.

Определение I.6

Выражение не содержащее знаков k и переменных будем называть объектным выражением. Множество всех объектных выражений обозначим через $\mathcal{E}_0$.

Из определений I.2, I.4, I.5, и I.6 следует, что

$$\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_\ell \subset \mathcal{E}_t \subset \mathcal{E}$$

Определение I.7

Рассмотрим $\mathcal{E} \in \varepsilon$. Обозначим через $\|\mathcal{E}\|$ множество переменных входящих в $\mathcal{E}$.

Примеры обѐктых выражений:

$$A, \qquad (()())() \qquad A(B(CD))$$

Примеры ℓ -выражений, не являющихся объектными выражениями:

$$s_1\ s_1\ A \qquad s_1\ e_2\ s_3$$

$$t_1\ e_2\ (t_3\ v_4\ (t_5\ e_6\ (v_7)))$$

Примеры типовых выражений, не являющихся ℓ -выражениями:

$$e_1\ s_x\ e_2\ s_x\ e_3 \qquad (e_1)(e_1)$$

$$e_1\ e_2 \qquad t_1\ e_2\ t_1$$

Примеры выражений, не являющихся типовыми выражениями:

$$k + (10)11\ 1$$

$$k * (e_1)\ e_2\ 1$$

Определение I.8

Если $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ текстуально совпадающие выражения, то будем писать $\mathcal{E}_1 \equiv \mathcal{E}_2$.

Пустое выражение будем изображать следующим образом: $\square$

Из определения I.8 следует, что отношение $\equiv$ является отношением эквивалентности на множестве ε.

2.Подстановки.

Определение 2.I

Подстановкой будем называть конечное множество упорядоченных пар: $\Delta = \{(\vartheta_i \to \mathcal{E}_i),\ i = 1,\dots, n\}$
где ϑ_i -переменная, $\mathcal{E}_i \in \mathcal{E}$. $\mathcal{E}_i$ будем называть значением ϑ_i.
$i = 1,\dots n$

Множество переменных, которым подставка Δ ставит в соответствии значение, будем обозначать $\|\Delta\|$, т.е.

$$\|\Delta\| = \{\vartheta \mid \exists \mathcal{E} \in \mathcal{E} : (\vartheta \to \mathcal{E}) \in \Delta\}$$

Подстановку назовем правильной, если:

(I) никакая переменная не получает значение дважды т.е. $i \neq j \Rightarrow \vartheta_i \neq \vartheta_j$

(2) Значения e-переменных - произвольные выражения.

(3) значения ϑ-переменных - Выражения, содержащие хотя бы один терм отличный от e-переменной и k-терма.

(4) значения t-переменных - жесткие термы.

(5) значения s-переменных - символы и s-переменные.

Определение 2.2

Применить правильную подстановку Δ к выражению $\mathcal{E}$ значит заменить все переменные в $\mathcal{E}$,которые входят в $\|\Delta\|$, на их значения. Результат применения подстановки Δ к выражению $\mathcal{E}$ будем обозначать через $\Delta /\!/ [\mathcal{E}]$. Там где это не приведет к двусмысленности, квадратные скобки будем опускать.

Из определения 2.2 следует, что если Δ - подстановка, то $\Delta /\!/ : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$

Теорема 2.I

Если $\mathcal{T}$ - жесткий терм, Δ - правильная подстановка, то $\Delta /\!/ [\mathcal{T}]$ - жесткий терм.

Доказательство.

Утверждение теоремы следует из определений I.3, 2.I и I.2.

3. Свойства подстановок. Произведение подстановок.

Определение 3.I

Отображение $f: \varepsilon \to \varepsilon$ назовем квазиподстановкой, если для любых $\mathcal{E}, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \varepsilon$ и любого символа $\mathcal{T}$ выполнено:

(I) $f[\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2] \equiv f[\mathcal{E}_1] f[\mathcal{E}_2]$

(2) $f[(\mathcal{E})] \equiv (f[\mathcal{E}])$

(3) $f[k\mathcal{E}_1] \equiv k f[\mathcal{E}]_1$

(4) $f[\mathcal{T}] \equiv \mathcal{T}$

(5) $f[\square] \equiv \square$

Теорема 3.I

Если Δ - правильная подстановка, то $\Delta /\!/$ квазиподстановка.

Доказательство.

Из определений 2.I и 2.2 следует, что все требуемые свойства квазиподстановки выполнены для $\Delta /\!/$.

Теорема 3.2 .

Если f_1 и f_2 - квазиподстановки, то для того, чтобы $f_1 = f_2$ (как отображения) необходимо и достаточно, чтобы для любой переменной выполнялось соотношение:

$$f_1[\vartheta] \equiv f_2[\vartheta].$$

Доказательство

Необходимость. Т.К. переменная является частным случаем выражения, то необходимость очевидна.

Достаточность. Если $\mathcal{E} \in \varepsilon$, то обозначим через $n(\mathcal{E})$ число пар конкретизационных и структурных скобок в $\mathcal{E}$. Докажем, что для любого $\mathcal{E} \in \varepsilon$ выполнено $f_1[\mathcal{E}] = f_2[\mathcal{E}]$, используя индукцию по числу пар конкретизационных и структурных скобок в $\mathcal{E}$.

База индукции.

Рассмотрим $\mathcal{E} \in \varepsilon$, такое, что $n(\mathcal{E}) = 0$, тогда либо $\mathcal{E} \equiv \square$ и (по определению 3.I) $f_1[\mathcal{E}] = f_2[\mathcal{E}]$

либо $\mathcal{E} \equiv \mathcal{T}_1 \ldots \mathcal{T}_m$, где $m > 0$, $\mathcal{T}_i$ - терм $(i = 1, \ldots, m)$ т.к. $n(\mathcal{E}) = 0$ то все $\mathcal{T}_i / i = 1, \ldots, m /$ имеют вид: ⟨символ⟩ или ⟨переменная⟩. Поэтому (по определению 3.I и по условиям теоремы) $f_1[\mathcal{T}_i] = f_2[\mathcal{T}_i] (i = 1, \ldots, m)$

Из этого по условиям теоремы (по определению 3.I) следует, что $f_1[\mathcal{E}] = f_1[\mathcal{T}_1] \ldots f_1[\mathcal{T}_m] = f_2[\mathcal{T}_1] \ldots f_2[\mathcal{T}_m] = f_2[\mathcal{E}]$

Итак, если $n(\mathcal{E}) = 0$, то $f_1[\mathcal{E}] = f_2[\mathcal{E}]$.

Шаг индукции.

Пусть для выражений $\mathcal{E}$, таких, что $n(\mathcal{E}) \leq K$ верно, что $f_1[\mathcal{E}] = f_2[\mathcal{E}]$. Рассмотрим $\mathcal{E}' \in \varepsilon$ такое, что $n(\mathcal{E}') = K+1$

Тогда или $\mathcal{E}' \equiv \mathcal{E}_1 (\mathcal{E}_2) \mathcal{E}_3$.

или $\mathcal{E}' \equiv \mathcal{E}_1 k \mathcal{E}_2 \perp \mathcal{E}_3$

при этом $n(\mathcal{E}_i) \leq K (i = 1, 2, 3)$

Используя предположение индукции и определение 3.I можно записать:

в первом случае:

$$f_1[\mathcal{E}'] = f_1[\mathcal{E}_1](f_1[\mathcal{E}_2])f_1[\mathcal{E}_3] = f_2[\mathcal{E}_1](f_2[\mathcal{E}_2])f_2[\mathcal{E}_3] = f_2[\mathcal{E}']$$

во втором случае:

$$f_1[\mathcal{E}'] = f_1[\mathcal{E}_1]\,k f_1[\mathcal{E}_2]_1 f_1[\mathcal{E}_3] = f_2[\mathcal{E}_1]\,k f_2[\mathcal{E}_2]_1 f_2[\mathcal{E}_3] = f_2[\mathcal{E}']$$

Итак, в любом случае $f_1[\mathcal{E}'] = f_2[\mathcal{E}']$

Индукция завершена.

Теорема 3.3

Если f_1, f_2 - квазиподстановки, то их суперпозиция $f = f_2 \circ f_1$ тоже квазиподстановка.

Доказательство.

Рассмотрим любые $\mathcal{E}, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \in \epsilon$, σ - символ. Тогда:

$$f[\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2] = f_2[f_1[\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2]] = f_2[f_1[\mathcal{E}_1]f_1[\mathcal{E}_2]] = f_2[f_1[\mathcal{E}_1]]f_2[f_1[\mathcal{E}_2]] = f[\mathcal{E}_1]f[\mathcal{E}_2]$$

$$f[\square] = f_2[f_1[\square]] = f_2[\square] = \square$$

$$f[\sigma] = f_2[f_1[\sigma]] = f_2[\sigma] = \sigma$$

$$f[(\mathcal{E})] = f_2[f_1[(\mathcal{E})]] = f_2[(f_1[\mathcal{E}])] = (f_2[f_1[\mathcal{E}]]) = (f[\mathcal{E}])$$

$$f[k\,\mathcal{E}_1] = f_2[f_1[k\,\mathcal{E}_1]] = f_2[k\,f_1[\mathcal{E}]_1] = k\,f_2[f_1[\mathcal{E}]]_1 = k\,f[\mathcal{E}]_1$$

Доказательство завершено.

Определение 3.2

Рассмотрим две правильные подстановки:

$$\Delta' = \{(\vartheta_i' \to \mathcal{E}_i'),\ i = 1,\dots,n'\}; \quad \Delta'' = \{(\vartheta_i'' \to \mathcal{E}_i'',\ i = 1,\dots,n''\}.$$

Подстановку

$$\Delta = \{(\vartheta_i' \to \mathcal{E}_i') \mid \vartheta_i' \in \|\Delta'\| \setminus \|\Delta''\|\} \cup \{(\vartheta_i'' \to \Delta' // [\mathcal{E}_i''])\mid \vartheta_i'' \in \|\Delta''\|\}$$

будем называть произведением подстановок Δ' и Δ''. Для неё будем использовать обозначение: $\Delta = \Delta' \cdot \Delta''$.

Теорема 3.4

Если Δ' и Δ'' - правильные подстановки, то $\Delta = \Delta' \cdot \Delta''$ - правильная подстановка и $\|\Delta\| = \|\Delta'\| \cup \|\Delta''\|$

Доказательство.

Следует из определений 2.2 и 3.2

Теорема 3.5

Если Δ' и Δ'' - правильные подстановки и $\Delta = \Delta' \cdot \Delta''$, то $\Delta /\!/ = \Delta' /\!/ \circ \Delta'' /\!/$

Доказательство.

Из теорем 3.I, 3.3, и 3.4 следует, что $\Delta /\!/$ и $\Delta' /\!/ \circ \Delta'' /\!/$ - квазиподстановки. Рассмотрим произвольную переменную ϑ. Для неё может выполняться одно из трех соотношений:

(I) $\vartheta \in \|\Delta''\|$

(2) $\vartheta \in \|\Delta'\| \setminus \|\Delta''\|$

(3) $\vartheta \notin \|\Delta'\| \cup \|\Delta''\|$

Случай I $\vartheta \in \|\Delta''\|$ Тогда существует $\mathcal{E} \in \varepsilon$, такое, что $(\vartheta \to \mathcal{E}) \in \Delta''$ т.е. $\Delta'' /\!/ [\vartheta] \equiv \mathcal{E}$ и $\Delta' /\!/ \circ \Delta'' /\!/ [\vartheta] \equiv \Delta' /\!/ \mathcal{E}$.

Из определения 3.2 следует, что $(\vartheta \to \Delta' /\!/ \mathcal{E}) \in \Delta$ т.е.
$$\Delta /\!/ [\vartheta] \equiv \Delta' /\!/ [\mathcal{E}] \equiv \Delta' /\!/ \circ \Delta'' /\!/ [\vartheta]$$

Случай 2 $\vartheta \in \|\Delta'\| \setminus \|\Delta''\|$ Тогда $\Delta'' /\!/ [\vartheta] \equiv \vartheta$ и существует такое $\mathcal{E} \in \varepsilon$ что $(\vartheta \to \mathcal{E}) \in \Delta'$. По определению 3.2 $(\vartheta \to \mathcal{E}) \in \Delta$ т.е. $\Delta /\!/ [\vartheta] \equiv \mathcal{E} \equiv \Delta' /\!/ [\vartheta] \equiv \Delta' /\!/ [\Delta'' /\!/ [\vartheta]] \equiv \Delta' /\!/ \circ \Delta'' /\!/ [\vartheta]$

Случай 3. $\vartheta \notin \|\Delta'\| \cup \|\Delta''\|$

Тогда $\vartheta \notin \|\Delta\|$ т.к. $\|\Delta\| = \|\Delta'\| \cup \|\Delta''\|$ /по теореме 3.4 /

Поэтому $\Delta//[\vartheta] = \vartheta = \Delta'//[\vartheta] = \Delta'//[\Delta''[\vartheta]] = \Delta'//\circ\Delta''//[\vartheta]$

Итак в любом случае $\Delta//[\vartheta] = \Delta'//\circ\Delta''//[\vartheta]$

По теореме 3.2 это означает, что $\Delta// = \Delta'//\circ\Delta''//$.

4. Отрицательные спецификации.

Изобразительных средств ограниченного РЕФАЛа, описанного в работе [I], не хватает для того чтобы представить разность двух классов / например: $s_1 s_2 \setminus s_A s_A$ /в виде конечного объединения классов. Предлагаемые здесь дополнительные средства для изображения множеств объектных выражений - отрицательные спецификации, позволяют так обобщить понятие класса, что разность двух классов можно будет представить в виде конечного объединения классов.

Определение 4.I

Неравенством будем называть неупорядоченную пару $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$ где каждое из выражений является или символом, или s,t-переменной или выражением в структурных скобках, при чем одно из этих выражений (будем обычно писать его в правой части неравенства) обязано быть или s - переменной, или символом.

$\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ будем называть правой и левой частью неравенства.

Примеры неравенств.

$t_1 \neq s_2$ $\quad$ $t_1 \neq A$ $\quad$ $(e_3 s_x t_y) \neq s$

$s_A \neq s_2$ $\quad$ $s_A \neq B$ $\quad$ $(t_y) \neq A$

$A \neq s_2$ $\quad$ $A \neq B$

<u>Определение 4.2</u>

Неравенство у которого правая часть текстуально совпадает с левой частью будем называть противоречием.

Неравенство будем называть тавтологией, если обе его части символы, и эти символы различны или одна из его частей имеет вид **(**<выражение>**)** .

<u>Примеры тавтологий</u>.

$(e_1) \neq s_2$ $\quad (e_A) \neq A$ $\quad A \neq B$

<u>Определение 4.3</u>

Конечное множество неравенств будем называть отрицательной спецификацией. Множество всех отрицательных спецификаций обозначим через η .

<u>Определение 4.4</u>

Применить подстановку Δ к неравенству, это значит применить её к правой и левой части неравенства.

Применить подстановку Δ к $\mathcal{N} \in \eta$ это значит применить её ко всем неравенствам входящим в $\mathcal{N}$. Результат применения подстановки Δ к $\mathcal{N}$ обозначим через $\Delta // [\mathcal{N}]$.

<u>Теорема 4.1</u>

Если Δ - правильная подстановка $\mathcal{N} \in \eta$, то $\Delta // [\mathcal{N}] \in \eta$.

<u>Доказательство</u>.

Следует из определений 2.2, 4.1, 4.3, и 4.4

<u>Определение 4.5</u>

Определим отображение $\Psi : \eta \to \eta$ следующим образом:

если $\mathcal{N} \in \eta$ то $\Psi[\mathcal{N}]$ получается из $\mathcal{N}$ удалением всех тавтологий, т.е. $\Psi[\mathcal{N}]$ это максимальное подмножество $\mathcal{N}$ не содержащее тавтологий.

~~Теорема 4.2~~

~~Если $\mathcal{N}, \mathcal{N}' \in \eta$, Δ - правильная подстановка, $\mathcal{N} \leq \mathcal{N}'$~~

~~то (I) $\Delta /\!/ [\mathcal{N}] \subseteq \Delta /\!/ [\mathcal{N}']$~~

~~(2) $\Psi[\mathcal{N}] \subseteq \Psi[\mathcal{N}']$~~

~~(3) $\Psi[\phi] = \phi$~~ ~~(4) $\Psi \circ \Delta /\!/ \circ \Psi[\mathcal{N}]$~~

~~Доказательство.~~

Следует из определений 4.4 и 4.5

Теорема 4.3

Если $\mathcal{N}, \mathcal{N}' \in \eta$, Δ - правильная подстановка, $\mathcal{N} \leq \mathcal{N}'$, то

(I) $\Delta /\!/ [\mathcal{N}] \subseteq \Delta /\!/ [\mathcal{N}']$

(2) $\Psi[\mathcal{N}] \subseteq \Psi[\mathcal{N}']$

(3) $\Psi[\phi] = \phi$

(4) $\Psi \circ \Delta /\!/ \circ \Psi[\mathcal{N}] = \Psi \circ \Delta /\!/ [\mathcal{N}]$

Доказательство.

Следует из определений 4.4 и 4.5 и теоремы 4.2.

Определение 4.6

Определим отображения $\mathcal{T}: \eta \to \eta$ следующим образом: если $\mathcal{N} \in \eta$ то $\mathcal{T}[\mathcal{N}]$ - это множество противоречий входящих в $\mathcal{N}$.

Теорема 4.4

Если $\mathcal{N} \in \eta$, $\mathcal{N}_1 \in \eta$ и $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}$, то

(1) $\mathcal{T}[\mathcal{N}] = \mathcal{T}[\Psi[\mathcal{N}]]$

(2) $\mathcal{T}[\mathcal{N}] \subseteq \Psi[\mathcal{N}]$

(3) $\mathcal{T}[\mathcal{N}_1] \subseteq \mathcal{T}[\mathcal{N}]$

Доказательство.

Следует из теоремы 4.2 и определения 4.5 и 4.6.

~~Теорема 4.5~~

~~Неравенство не может быть одновременно и тавтологией и противоречием.~~

~~Доказательство.~~

~~Следует из определения 4.2.~~

Теорема 4.6

Если $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$ - неравенство, Δ_1, Δ_2 - правильные подстановки, то

(1) Если $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$ - тавтология, то $\Delta_1 /\!/ \mathcal{E}_1 \neq \Delta_2 /\!/ \mathcal{E}_2$ - тавтология.

(2) Если $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$ - противоречие, то $\Delta_1 /\!/ \mathcal{E}_1 \neq \Delta_2 /\!/ \mathcal{E}_2$ - противоречие

Доказательство.

Следует из определений 2.2, 4.2 и 4.4

Следствие 4.6

Если $\mathcal{N} \in \eta$, $\mathcal{T}[\mathcal{N}] \neq \emptyset$, Δ - правильная подстановка, то $\mathcal{T}[\Delta /\!/ \mathcal{N}] \neq \emptyset$.

5. Классы и подклассы.

Определение 5.1

Рассмотрим две пары $(\mathcal{E}_1, \mathcal{N}_1)$ и $(\mathcal{E}_2, \mathcal{N}_2)$ где $\mathcal{E}_i \in \varepsilon$ и $\mathcal{N}_i \in \eta$ $/i=1,2/$. Говорят, что $(\mathcal{E}_1, \mathcal{N}_1)$ - подкласс $(\mathcal{E}_2, \mathcal{N}_2)$ и пишут $(\mathcal{E}_1, \mathcal{N}_1) \leq (\mathcal{E}_2, \mathcal{N}_2)$ если существует Δ -правильная подстановка, такая, что:

(1) $\mathcal{E}_1 = \Delta /\!/ \mathcal{E}_2$

(2) $\mathcal{T}[\Delta /\!/ [\mathcal{N}_2]] = \emptyset$

(3) $\Psi[\Delta /\!/ [\mathcal{N}_2]] \subseteq \mathcal{N}_1$

$(\Delta /\!/ \mathcal{N}_2) \setminus \mathcal{N}_1$ состоит из тавтологий

Определение 5.2

Рассмотрим $\mathcal{E}_0 \in \varepsilon_0, \mathcal{E}_t \in \varepsilon_t$ и $\mathcal{N}_t \in \eta$. Будем говорить что $\mathcal{E}_0$ отождествимо с $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$ если $(\mathcal{E}_0, \phi) \leqslant (\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$

Другими словами: $\mathcal{E}_0$ отождествимо с $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$ если существует такая правильная подстановка Δ, что

(I) $\mathcal{E}_0 = \Delta // \mathcal{E}_t$;
(2) $\mathcal{H}[\Delta // [\mathcal{N}]] = \phi$
(3) $\Psi[\Delta // [\mathcal{N}_t]] = \phi$

Говоря неформально, $\mathcal{E}_0$ отождествимо с $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$ если можно подобрать такие значения переменных, что:

(I) $\mathcal{E}_t$ совпадет с $\mathcal{E}_0$,

(2) Эти значения не будут противоречить неравенствам из $\mathcal{N}_t$ и

(3) обратят эти неравенства в тавтологии.

В этом смысле $\mathcal{N}_t$ изображает "запрещенные" значения переменных.

Замечание.

В определении 5.2 условие (2) следует (по теореме 4.4) из условия (3), поэтому его можно удалить из определения.

Определение 5.3

Паре $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$, где ($\mathcal{E}_t \in \varepsilon_t$, $\mathcal{N}_t \in \eta$ поставим в соответствии множество $\{\mathcal{E}_0 \in \varepsilon_0 \mid \mathcal{E}_0$ — отождествимо с $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)\}$) ~~поставим в соответствии~~ уместить

В дальнейшем для обозначения этого множества будем использовать (в духе работы [I]) саму пару $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$.

Из контекста всегда будет ясно, где говориться о паре, а где о множестве.

Множество $(\mathcal{E}_t\ \mathcal{N}_t)$, где $\mathcal{E}_t \in \varepsilon_t\ \mathcal{N}_t \in \eta$ будем называть классом.

Таким образом:

$$(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t) = \{\mathcal{E}_0 \in \varepsilon_0 \mid (\mathcal{E}_0, \phi) \leqslant (\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)\}$$

<u>Пример:</u> $\mathcal{E}_0 = (e_1, \phi)$

Докажем теорему, аналогичную теореме 4 из [I] .

<u>Теорема 5.I</u>

Если $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \varepsilon_t$; $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in \eta$ и $(\mathcal{E}_1, \mathcal{N}_1) \leqslant (\mathcal{E}_2, \mathcal{N}_2)$, то $(\mathcal{E}_1, \mathcal{N}_1) \subseteq (\mathcal{E}_2, \mathcal{N}_2)$.

<u>Доказательство.</u>

Т.к. $(\mathcal{E}_1, \mathcal{N}_1) \leqslant (\mathcal{E}_2, \mathcal{N}_2)$ то существует такая правильная подстановка Δ, что

(I.) $\mathcal{E}_1 \doteq \Delta /\!/ \mathcal{E}_2$

(2.) $\Psi[\Delta /\!/ [\mathcal{N}_2]] \leqslant \mathcal{N}_1$

Рассмотрим произвольное выражение $\mathcal{E}_0 \in (\mathcal{E}_1, \mathcal{N}_1)$. Для него существует правильная подстановка Δ, такая,что:

(A) $\mathcal{E}_0 \doteq \Delta_0 /\!/ \mathcal{E}_1$

(B) $\Psi[\Delta_0 /\!/ \mathcal{N}_1] = \phi$

Рассмотрим правильную подстановку $\Delta_1 = \Delta_0 \cdot \Delta$ (см. определение 3.2 и теоремы 3.4 и 3.5). Тогда

$$\Delta_1 /\!/ [\mathcal{E}_2] \doteq \Delta_0 /\!/ [\Delta /\!/ [\mathcal{E}_2]] \doteq \Delta_0 /\!/ [\mathcal{E}_1] \doteq \mathcal{E}_0$$

Т.К. $\Psi[\Delta /\!/ [\mathcal{N}_2]] \subseteq \mathcal{N}_1$ то (по теореме 4.3)

$$\Psi[\Delta_0 /\!/ [\Psi[\Delta /\!/ \mathcal{N}_2]]] \subseteq \Psi[\Delta_0 /\!/ \mathcal{N}_1] = \phi$$

т.е. $\Psi \circ \Delta_0 /\!/ \circ \Psi \circ \Delta /\!/ [\mathcal{N}_2] = \phi$ но (по теореме 4.3)

$$\Psi \circ \Delta_0 /\!/ \circ \Psi \circ \Delta /\!/ [\mathcal{N}_2] = \Psi \circ \Delta_0 /\!/ \circ \Delta /\!/ [\mathcal{N}_2] = \Psi[\Delta_1 /\!/ [\mathcal{N}_2]].$$

Таким образом, Δ_1 такова, что: $\Delta_1 // [\mathcal{E}_2] = \mathcal{E}_0$ и $\Psi[\Delta_1 // [\mathcal{N}_2]] = \phi$ т.е. $\mathcal{E}_0 \in (\mathcal{E}_2, \mathcal{N}_2)$.

Итак из $\mathcal{E}_0 \in (\mathcal{E}_1, \mathcal{N}_1)$ следует $\mathcal{E}_0 \in (\mathcal{E}_2, \mathcal{N}_2)$ т.е. $(\mathcal{E}_1, \mathcal{N}_1) \subseteq (\mathcal{E}_2, \mathcal{N}_2)$

Теорема 5.I доказана.

Пример I.

Рассмотрим $\mathcal{E}_1 \equiv s_1 s_2 s_3 \in \varepsilon_t$; $\mathcal{N}_1 = \{s_1 \neq s_2, s_2 \neq s_3, s_1 \neq s_3\} \in \eta$;

$$\mathcal{E}_2 \equiv s_A s_B s_C \in \varepsilon_t$$

$$\mathcal{N}_2 = \{s_A \neq s_B, s_C \neq s_B\}$$

$$\Delta = \{(s_A \to s_1), (s_B \to s_2), (s_B \to s_2), (s_C \to s_3)\}$$

-правильная подастановка. $\Delta // \mathcal{E}_2 \equiv \mathcal{E}_1$

$$\Psi[\Delta // [\mathcal{N}_2]] = \{s_1 \neq s_2, s_3 \neq s_2\} \subseteq \mathcal{N}_1$$

$$\mathcal{T}[\Delta // [\mathcal{N}_2]] = \phi$$

т.е. $(\mathcal{E}_1, \mathcal{N}_1) \leq (\mathcal{E}_2, \mathcal{N}_2)$. Из теоремы 5.I следует, что $(\mathcal{E}_1, \mathcal{N}_1) \subseteq (\mathcal{E}_2, \mathcal{N}_2)$ Можно доказать,что $(\mathcal{E}_1, \mathcal{N}_1)$ состоит из цепочек символов,длина которых равна трем и в которых нет совпадающих символов.

$(\mathcal{E}_2, \mathcal{N}_2)$ состоит из цепочек символов,длина которых равна трем и в которых крайние символы отличны от центрального.

Теорема 5.2

Если $\mathcal{E}_t \in \varepsilon_t$; $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in \eta$ и $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}_2$ и $\mathcal{T}[\mathcal{N}_1] = \phi$ то $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_2) \leq (\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_1)$

Доказательство:

Рассмотрим подстановку ϕ. Она является правильной. Кроме того (по определению 2.2) для любого $\mathcal{E} \in \varepsilon$ можно записать $\phi // \mathcal{E} \equiv \mathcal{E}$ а значит, для любого $\mathcal{N} \in \eta$ выполняется $\phi // \mathcal{N} = \mathcal{N}$

Поэтому (I) $\phi // \mathcal{E}_t = \mathcal{E}_t$

(2) $\mathcal{T}[\phi // \mathcal{N}_1] = \phi$

(3) $\Psi[\phi // \mathcal{N}_1] \subseteq \mathcal{N}_2$

Следствие

Если $\mathcal{E} \in \varepsilon_t$, $\mathcal{N} \in \eta$ и $\mathcal{T}[\mathcal{N}] = \phi$ то $(\mathcal{E}, \mathcal{N}) \leq (\mathcal{E}, \mathcal{N})$

Теорема 5.3

Если $\mathcal{E}_i \in \varepsilon_t$, $\mathcal{N}_i \in \eta$ $/i = 1,2,3/$, $(\mathcal{E}_1, \mathcal{N}_1) \leq (\mathcal{E}_2, \mathcal{N}_2) \leq (\mathcal{E}_3, \mathcal{N}_3)$, то $(\mathcal{E}_1, \mathcal{N}_1) \leq (\mathcal{E}_3, \mathcal{N}_3)$

Доказательство

Из условий теоремы следует, что существуют правильные подстановки Δ' и Δ'' такие, что: $\mathcal{E}_1 = \Delta' // \mathcal{E}_2$; $\mathcal{T}[\Delta' // \mathcal{N}_2] = \phi$;

$\Psi[\Delta' // \mathcal{N}_2] \subseteq \mathcal{N}_1$, $\mathcal{E}_2 = \Delta'' // \mathcal{E}_3$;

$\mathcal{T}[\Delta'' // \mathcal{N}_3] = \phi$; $\Psi[\Delta'' // \mathcal{N}_3] \subseteq \mathcal{N}_2$;

Тогда рассмотрим $\Delta = \Delta' \cdot \Delta''$. Это /см.теоремы 3.4 и 3.5/ правильная подстановка, причем $\Delta // = \Delta' \circ \Delta'' //$.

Тогда $\Delta // \mathcal{E}_3 = \Delta' // \circ \Delta'' // \mathcal{E}_3 = \Delta' // \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1$ (I)

Т.к. $\Psi \circ \Delta'' // \mathcal{N}_3 \subseteq \mathcal{N}_2$; то используя теоремы 4.3 и 4.4

получим: $\Psi[\Delta // \mathcal{N}_3] = \Psi \circ \Delta' // \circ \Delta'' // [\mathcal{N}_3] = \Psi \circ \Delta' // \circ \Psi \circ \Delta'' // [\mathcal{N}_3] \subseteq \Psi \circ \Delta' // [\mathcal{N}_2] \subseteq \mathcal{N}_1$ (2)

$\mathcal{T} \circ \Delta // \mathcal{N}_3 = \mathcal{T} \circ \Delta' // \circ \Delta'' // [\mathcal{N}_3] = \mathcal{T} \circ \Psi \circ \Delta' // \circ \Delta'' // [\mathcal{N}_3] =$

$= \mathcal{T} \circ \Psi \circ \Delta' // \circ \Psi \circ \Delta'' // [\mathcal{N}_3] = \mathcal{T} \circ \Delta' // [\Psi \circ \Delta'' [\mathcal{N}_3]] \subseteq \mathcal{T} \circ \Delta' // [\mathcal{N}_2] = \phi$

т.е. $\mathcal{T} \circ \Delta // [\mathcal{N}_3] = \phi$ (3)

Из соотношений (I) (2) (3) следует, что $(\mathcal{E}_1, \mathcal{N}_1) \leq (\mathcal{E}_3, \mathcal{N}_3)$

Теорема 5.4

Если Δ - правильная подстановка, $\mathcal{E}_t \in \varepsilon_t$, $\mathcal{N}_t \in \eta$,
$\mathcal{J}[\Delta /\!/ \mathcal{N}_t] = \phi$ то $(\Delta /\!/ \mathcal{E}_t, \Delta /\!/ \mathcal{N}_t) \leqslant (\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$

Доказательство.

$$\Delta /\!/ \mathcal{E}_t \equiv \Delta /\!/ \mathcal{E}_t \qquad (1)$$

$$\mathcal{J}[\Delta /\!/ \mathcal{N}_t] = \phi \qquad (2)$$

$$\Psi[\Delta /\!/ \mathcal{N}_t] \subseteq \Delta /\!/ \mathcal{N}_t \qquad (3)$$

Поэтому $(\Delta /\!/ \mathcal{E}_t, \Delta /\!/ \mathcal{N}_t) \leqslant (\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$.

Теорема 5.5

Если $\mathcal{E}_t \in \varepsilon_t, \mathcal{N}_t \in \eta, \mathcal{J}[\mathcal{N}] \neq \phi$ то $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t) = \phi$

Доказательство

Следует из следствия 4.6 и определений 5.2 и 5.3

6. Основная задача.

В введении ставилась основная задача данной работы: представить пересечение и разность двух классов в виде конечного объединения классов,

Теперь когда понятие классов определено, можно уточнить постановку задачи.

Пусть $\mathcal{E}_e \in \varepsilon_e$; $\mathcal{E}_t \in \varepsilon_t$; $\mathcal{N}_e, \mathcal{N}_t \in \eta$

Нужно представить множества $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t) \cap (\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e)$ и $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t) \setminus (\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e)$ в виде объединения конечного числа классов.

Для решения этой задачи будут строиться два конечных семейства подклассов $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$, исчерпывающих $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$ и таких, что объединение подклассов из первого семейства дает нам множество $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t) \cap (\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e)$, а объединение подклассов из второго семейства - множество $(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)\setminus(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e)$

При этом подклассы $(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)$ из первого семейства будут являться подклассами $(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e)$.

Теорема 6.I

Если $(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)$ представлено в виде $(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)=T\cup F$

где (I) $T=\bigcup_{k=1}^{n}(\mathcal{E}_k^T,\mathcal{N}_k^T)$;

(2) $F=\bigcup_{j=1}^{m}(\mathcal{E}_j^F,\mathcal{N}_j^F)$; причем

(3) $(\mathcal{E}_k^T,\mathcal{N}_k^T)\leq(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)$ $/k=1,\dots,n,/$

(4) $(\mathcal{E}_j^F,\mathcal{N}_j^F)\leq(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)$ $/j=1,\dots,m/$

(5) $(\mathcal{E}_k^T,\mathcal{N}_k^T)\leq(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e)$ $/k=1,\dots,n/$

(6) $(\mathcal{E}_j^F,\mathcal{N}_j^F)\cap(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e)=\emptyset$ $/j=1,\dots,m/$

то $T=(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)\cap(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e)$

$F=(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)\setminus(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e)$

Доказательство

Из соотношений (I), (3) и (5) и теоремы 5.I следует, что $T\subseteq(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)\cap(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e)$ (7)

Из соотношений (2) и (6) следует, что $F\cap(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e)=\emptyset$

(8)

Из (7) и (8) следует, что $F\cap T=\emptyset$

Т.к. выполнено (7) то можно записать:

$$T\subseteq(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e) \text{ или } T\cap(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e)=T \qquad (9)$$

Используя (8) и (9) получим

$$(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)\cap(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e)=(T\cup F)\cap(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e)=[T\cap(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e)]\cup[F\cap(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e)]=T$$

Используя (8) и (9) мы можем записать:

$$T \setminus (\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e) = \phi \quad \text{и} \quad F \setminus (\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e) = F$$

откуда:

$$(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t) \cap (\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e) = (T \cup F) \setminus (\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e) = [T \setminus (\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e)] \cup [F \setminus (\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e)] = F$$

теорема доказана.

В дальнейшем нам надо будет отличать переменные из $(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e)$ от переменных из $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$

Для этого переменные из $(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e)$ будем обозначать следующим образом, признаки этих переменных: s, t, e, ϑ заменим на признаки $\bar{s}, \bar{t}, \bar{e}, \bar{\vartheta}$ соответственно.

7. Равенства.

Определение 7.I

Равенством будем называть упорядоченную пару: $\mathcal{E}_e' = \mathcal{E}_t'$ где $\mathcal{E}_e$ — ℓ- выражение, называемое левой частью равенства

$\mathcal{E}_t$ - типовое выражение, называемое правой частью равенства.

Равенство будет называться жестким, если оно имеет один из следующих видов:

(I) $\bar{s}_i = s_j$	(2) $\bar{s}_i = t_j$	(3) $\bar{s}_i = \sigma$	(4) $\bar{s}_i = (\mathcal{E})$
(5) $s_i = s_j$	(6) $s_i = t_j$	(7) $s_i = \sigma$	(8) $s_i = (\mathcal{E})$
(9) $(\mathcal{E}) = s_j$	(10) $(\mathcal{E}) = \sigma$	(II) $\sigma = s_j$	(I2) $\sigma = s_j$
(I3) $\sigma_1 = \sigma_2$	(I4) $\sigma = (\mathcal{E})$		

где i, j - индексы; $\mathcal{E} \in \mathcal{E}_t$; $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ - символы

Будет равенство называться мягким, если оно не жесткое.

Равенство $\mathscr{E}_e' = \mathscr{E}_t'$ назовем тавтологией, если $\mathscr{E}_e' \equiv \mathscr{E}_t'$

Жесткие равенства типа (4) (8) (9) (I0) (I4) а так же (13) если $\sigma_1 \neq \sigma_2$, назовем противоречием.

Мягкое равенство назовем противоречием, если оно имеет один из следующих видов:

(I) $\square = \mathscr{E}_t'$ и в $\mathscr{E}_t'$ есть хотя бы один терм, отличный от e - переменной.

(2) $\mathscr{E}_e' = \square$ и в $\mathscr{E}_e'$ - есть хотя бы один терм, отличный от e - переменной.

Результатом применения подстановки Δ к равенству $\mathscr{E}_e' = \mathscr{E}_t'$ будем называть равенство $\Delta // [\mathscr{E}_e'] = \Delta // [\mathscr{E}_t']$

<u>Теорема 7.I</u>

Если Δ_1 и Δ_2 - правильные подстановки, а $\mathscr{E}_e' = \mathscr{E}_t'$ - равенство, то

(I) если $\mathscr{E}_e' = \mathscr{E}_t'$ жесткое, то
$\Delta_1 // [\mathscr{E}_e'] = \Delta_2 // [\mathscr{E}_t']$ жесткое.

(2) если $\mathscr{E}_e' = \mathscr{E}_t'$ -противоречие, то
$\Delta_1 // [\mathscr{E}_e'] = \Delta_2 // [\mathscr{E}_t']$ - противоречие.

(3) если $\mathscr{E}_e' = \mathscr{E}_t'$ - тавтология, то
$\Delta_1 // [\mathscr{E}_e'] = \Delta_1 // [\mathscr{E}_t']$ - тавтология

<u>Доказательство.</u>

Следует из определений 2.2 и 7.I.

Теорема 7.2

Равенство не может быть тавтологией и противоречием одновременно.

Доказательства

Следует из определения 7.I

Теорема 7.3

(Основное свойство равенств-противоречий)

Если равенство $\mathcal{E}_e' = \mathcal{E}_t'$ - противоречие, то $(\mathcal{E}_e', \phi) \cap (\mathcal{E}_t', \phi) = \phi$

Доказательство

Проведем доказательство от противного.

Пусть существует $\mathcal{E}_0 \in (\mathcal{E}_e', \phi) \cap (\mathcal{E}_t', \phi)$.

Тогда существуют правильные подстановки Δ_e и Δ_t такие, что $\Delta_e // \mathcal{E}_e' = \mathcal{E}_0$ и $\Delta_t // \mathcal{E}_t' = \mathcal{E}_0$

т.е. равенство $\Delta_e // \mathcal{E}_e' = \Delta_t // \mathcal{E}_t'$ является тавтологией.

Но/по теореме 7.1/ оно одновременно является противоречием, что противоречит теореме 7.2.

Теорема 7.4

Если $\mathcal{E}_e' = \mathcal{E}_t'$ - противоречие и $\mathcal{N}_e', \mathcal{N}_t' \in \eta$ то $(\mathcal{E}_e', \mathcal{N}_e') \cap (\mathcal{E}_t', \mathcal{N}_t') = \phi$

Доказательство

По теореме 7.3 $(\mathcal{E}_e', \phi) \cap (\mathcal{E}_t' \ \phi) = \phi$

По теореме 5.2 $(\mathcal{E}_e', \mathcal{N}_e') \leq (\mathcal{E}_e' \ \phi)$ и $(\mathcal{E}_t', \mathcal{N}_t') \leq (\mathcal{E}_t', \phi)$

Отсюда /по теореме 5.I/

$(\mathcal{E}_e', \mathcal{N}_e') \subseteq (\mathcal{E}_e', \phi)$ и $(\mathcal{E}_t', \mathcal{N}_t') \subseteq (\mathcal{E}_t', \phi)$

Поэтому $(\mathcal{E}_e', \mathcal{N}_e') \cap (\mathcal{E}_t', \mathcal{N}_t') = \phi$

8. Сужения

Определение 8.I

Элементарное сужение δ это объект одного из следующих ~~видов~~:

(I) $(\vartheta \to \mathscr{E})$

(2) $(s_j \to s[\mathscr{E}']j)$

(3) $(t_j \to t[\mathscr{E}']j)$

где ϑ - переменная, $\mathscr{E} \in \varepsilon_t$, j - индекс, $\mathscr{E}'$ -либо символ, либо s- переменная.

Результатом применения δ к классу $(\mathscr{E}_t, \mathscr{N}_t)$ назовем класс $(\{(\vartheta \to \mathscr{E})\}//\mathscr{E}_t, \{(\vartheta \to \mathscr{E})\}//\mathscr{N}_t)$, если δ имеет вид $(\vartheta \to \mathscr{E})$;

$(\mathscr{E}_t, \mathscr{N}_t \cup \{s_j \neq \mathscr{E}'\})$ если δ имеет вид $(s_j \to s[s']j]$

$(\mathscr{E}_t, \mathscr{N}_t \cup \{t_j \neq \mathscr{E}'\})$, если δ имеет вид $(t_j \to t[\mathscr{E}']j)$.

расположить красиво

Результат применения δ к $(\mathscr{E}_t, \mathscr{N}_t)$ будем обозначать через $\delta//(\mathscr{E}_t, \mathscr{N}_t)$

Теорема 8.I

Если $\mathscr{E}_t \in \varepsilon_t$, $\mathscr{N}_t \in \eta$, $\mathscr{T}[\mathscr{N}_t] = \phi$,

δ элементарное сужение, то

или $\delta//(\mathscr{E}_t, \mathscr{N}_t) = \phi$ или $\delta//(\mathscr{E}_t, \mathscr{N}_t) \leq (\mathscr{E}_t, \mathscr{N}_t)$

Доказательство

Пусть $\delta//(\mathscr{E}_t, \mathscr{N}_t) = (\mathscr{E}_1, \mathscr{N}_1)$

Если $\mathscr{T}[\mathscr{N}_1] \neq \phi$ то по теореме 5.5 $\delta//(\mathscr{E}_t, \mathscr{N}_t) = \phi$

Рассмотрим случай, когда $\mathscr{T}[\mathscr{N}_1] = \phi$

Тогда, если δ имеет вид $(\vartheta \to \mathscr{E})$ то

$\delta//(\mathscr{E}_t, \mathscr{N}_t) = (\{\delta\}//\mathscr{E}_t, \{\delta\}//\mathscr{N}_t)$ и $\mathscr{T}[\{\delta\}//\mathscr{N}_t] = \phi$

поэтому / по теореме 5.4 / $\delta /\!/ (\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t) \leq (\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$

Если δ имеет вид отличный от $(\vartheta \to \mathcal{E})$ то / по определению 8.I/ $\mathcal{N}_t \subseteq \mathcal{N}_1$ и т.к. $\mathcal{T}[\mathcal{N}_t] = \phi$ то /по теореме 5.2 / $\delta /\!/ (\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t) \leq (\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$.

9. Системы. Преобразования систем.

Определение 9.I

Будем называть равенства и неравенства отношениями. Множество всех конечных множеств отношений обозначим через ω. Таким образом, $\eta \subset \omega$

Доопределим отображения $\Psi: \eta \to \eta$ и $\mathcal{T}: \eta \to \eta$ на множества ω так,чтобы на множестве η они совпадали с ранее введенными отображениями.

Определение 9.2

Рассмотрим $Z \in \omega$. Определим $\mathcal{T}[Z]$ как множество противоречий входящих в Z, а $\Psi[Z]$ как максимальное подмножество несодержащее тавтологий. Т.е. $\Psi[Z]$ - множество отношений из Z, не являющихся тавтологиями.

Теорема 9.I.

Если $Z \subset \omega$, Δ - правильная подстановка, то

(I) $\mathcal{T}[Z] \subseteq \Psi[Z]$

(2) $\mathcal{T}[Z] = \mathcal{T} \circ \Psi[Z]$

(3) $\Psi \circ \Delta /\!/ [Z] = \Psi \circ \Delta /\!/ \circ \Psi[Z]$

Доказательство

Следует из теорем 4.3, 4.9 и 7.1, 7.2 определений 7.1 и 9.2.

Определение 9.3

Системой назовем упорядоченную тройку: $\Sigma = (X, Y, Z)$

где: (I) X - конечное множество равенств.

(2) Y и Z - конечные множества неравенств.

Отношения входящие в X и Y будем называть условными, отношения входящие в Z будем называть безусловными. Обозначим множество всех систем через $\mathcal{S}$.

Рассмотрим ситему $\Sigma \in \mathcal{S}$. Систему, полученную в результате удаления всех тавтологией из Σ обозначим через $P\psi(\Sigma)$. Т.е. если $\Sigma = (X, Y, Z)$ то $P\psi(\Sigma) = (\psi[X], \psi[Y], \psi[Z])$.

Будем говорить, что $P\psi$ не применима к $\Sigma \in \mathcal{S}$, если $P_\psi[\Sigma] = \Sigma$.

Определение 9.4

Деревом разбора равенства $\mathcal{E}' = \mathcal{E}''$ назовем дерево, в корневой вершине которого записано само равенство $\mathcal{E}' = \mathcal{E}''$, а дочернии вершины для любой вершины однозначно. сплошной текст

определяются следующим правилом:

(I) Если в вершине записано $\mathcal{T}'\mathcal{E}' = \mathcal{T}''\mathcal{E}''$, где $\mathcal{T}', \mathcal{T}''$ - жесткие термы, $\mathcal{E}', \mathcal{E}'' \in \mathcal{E}_t$, причем [redacted] $\mathcal{E}' \neq \square$ или $\mathcal{E}'' \neq \square$, то эта вершина имеет две дочернии вершины. В одной из них записано $\mathcal{T}' = \mathcal{T}''$, в другой $\mathcal{E}' = \mathcal{E}''$.

(2) Если в вершине записано $\mathcal{E}'\mathcal{T}' = \mathcal{E}''\mathcal{T}''$, где $\mathcal{T}', \mathcal{T}''$ - жесткие термы, $\mathcal{E}', \mathcal{E}'' \in \mathcal{E}_t$ причем [redacted] $\mathcal{E}' \neq \square$ или $\mathcal{E}'' \neq \square$, то эта вершина имеет две дочернии вершины. В одной записано $\mathcal{T}' = \mathcal{T}''$, в другой $\mathcal{E}' = \mathcal{E}''$.

(3) Если в вершине записано $(\mathcal{E}') = (\mathcal{E}'')$, где $\mathcal{E}', \mathcal{E}'' \in \mathcal{E}_t$, то эта вершина имеет одну дочернюю вершину, в которой записано $\mathcal{E}' = \mathcal{E}''$

(4) Если к вершине не применимы правила (I) ÷ (3), то она терминальная. Равенство, к которому не применимы правила (I) ÷ (3) будем называть терминальными.

Теорема 9.3

Дерево разбора равенства конечное.

Доказательство.

Из определения 9.4 следует, что длина (в знаках) равенств, записаных в вершинах некоторой ветви дерева, строго убывает с ростом глубины вершины. Поэтому дерево не может име иметь ветвей бесконечной длины. Т.к. любая вершина имеет конечное число дочерних вершин и любая ветвь в дереве имеет конечную длину, то (по теореме Кёнига [2, стр. 472]) дерево конечно.

Теорема 9.4

Если $\mathcal{E}'=\mathcal{E}''$ - жесткие равенства, то оно терминальное.

Доказательство

Следует из определений 7.1 и 9.5.

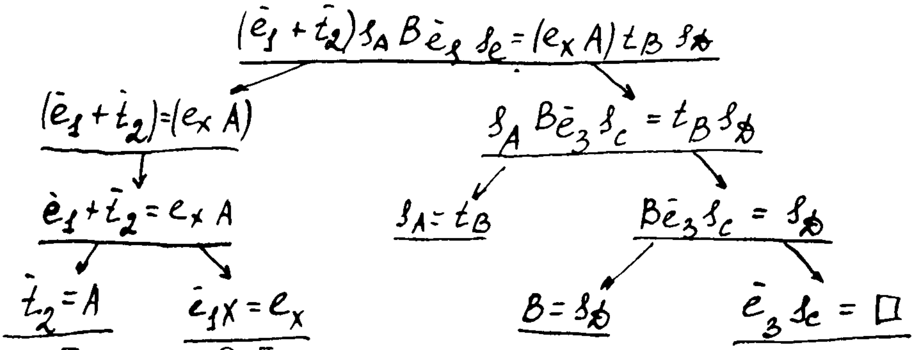
Обозначение

Если $\mathcal{E}'=\mathcal{E}''$ - равенство, то через $P'[\mathcal{E}'=\mathcal{E}'']$ обозначим множество терминальных равенств из дерева разбора этого равенства.

Пример.

$$P[(\bar{e}_1+\bar{t}_2)s_A B_{\bar{e}_7} s_C=(e_x A)t_B s_b]=\{\bar{t}_2=A, \grave{e}_1 t=e_x, s_A=t_B, B=s_b, \bar{e}_3 s_e=\square\}$$

Соответствующее дерево разбора:



Теорема 9.5

Если равенство $\mathcal{E}' = \mathcal{E}''$ написано в некоторой вершине дерева разбора, а равенство $\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_2$ записано в ее дочерней вершине, то $\mathcal{E}_1$ является подвыражением $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}_2$ является подвыражением $\mathcal{E}''$.

Доказательство

Следует из определения 9.4.

Следствие 9.I

Если равенство $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ написано в вершине дерева разбора, являющейся потомком вершины в которой написано равенство $\mathcal{E}' = \mathcal{E}''$, то $\mathcal{E}_1$ является подвыражением $\mathcal{E}'$, а $\mathcal{E}_2$ является подвыражением $\mathcal{E}''$.

Определение 9.5

Рассмотрим $\Sigma = (X, Y, Z) \in \mathcal{S}$ Систему полученную из Σ замеой каждого равенства из X на терминальные равенства из его дерева разбора, будем называть результатом применения к Σ правила разбора мягких равенств и обозначать через $P_1[\Sigma]$

Таким образом $P_1 : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ и $P_1[\Sigma] = (\bigcup_{\mathcal{E}' = \mathcal{E}'' \in X} P'[\mathcal{E}' = \mathcal{E}''], Y, Z)$.

Определение 9.6

Систему $\Sigma = (X, Y, Z) \in \mathcal{S}$ будем называть допустимой, если она удовлетворяет следующим условиям:

(I) переменные с признаками $\dot{s}, \bar{t}, \bar{e}, \bar{v}$ не входят в отношения из Z и правые части равенств из X.

(2) никакая t-, e-, ϑ- переменная не встречается в отношениях из X дважды.

(3) в левые части равенств из X входят только s-, t-, e-, ϑ- и s- переменные.

(4) левая часть любого равенства из X является l - выражением.

Множество всех допустимых систем обозначим через S_R.

Определение 9.2.

Пусть $\Sigma=(X,Y,Z)\in S_R$

Будем говорить, что $\Sigma'\in S$ является результатом выполнения присваивания в Σ, если имеет место один из следующих случаев (I)$\div$(5).

(I) В X есть равенство вида $\bar{e}_x=\mathcal{E}$, $\Sigma'=(\Delta/\!/X,\Delta/\!/Y,Z)$ где x - индекс, $\mathcal{E}\in\mathcal{E}_t$, $\Delta=\{(\bar{e}_x\to\mathcal{E})\}$ - правильная подстановка.

(2) В X есть равенство вида $\bar{\vartheta}_x=\mathcal{E}$, $\Sigma'=(\Delta/\!/X,\Delta/\!/Y,Z)$ где x - индекс, $\mathcal{E}\in\mathcal{E}_t$, в $\mathcal{E}$ есть хотябы один терм отличный от e - переменной, $\Delta\{(\bar{\vartheta}_x\to\mathcal{E})\}$ - правильная подстановка.

(3) В X есть равенство вида $\bar{t}_x=\mathcal{T}$, $\Sigma'=(\Delta/\!/X,\Delta/\!/Y,Z)$ где $\mathcal{T}$ - жесткий терм, $\Delta=\{(\bar{t}_x\to\mathcal{T})\}$ - правильная подстановка.

(4) В X есть равенство вида $\bar{s}_x=\mathcal{T}$, $\Sigma'=(\Delta/\!/X,\Delta/\!/Y,Z)$, где $\mathcal{T}$ либо симовл либо s - переменная, $\Delta=\{(\bar{s}_x\to\mathcal{T})\}$ - правильная подстановка.

(5) Правила $(1)\div(4)$ не применимы, и $\Sigma = \Sigma'$.

В дальнейшем будем считать, что задана операция $Pa: S_p \to S$ которая каждой системе Σ ставит в соответствии систему Σ', которая является результатом выполненеия присваивания в Σ.

Лемма 9.I

Если $\Sigma = (X, Y, Z) \in S_R$, $\Sigma' = (X', Y', Z') \in S'$ и $X' \subseteq X$, $Y \in \eta$, $Z' \subseteq Z$ то $\Sigma' \in S_R$

Доказательство

Следует из определения 9.6.

Лемма 9.2.

Если $\Sigma = (X, Y, Z) \in S_R$, $X = X' \cup \{\mathcal{E}' = \mathcal{E}''\}$, $\Sigma' = (X' \cup P'[\mathcal{E}' = \mathcal{E}''], Y, Z)$ то $\Sigma' \in S_R$

Доказательство

Если равенство $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 \in P'[\mathcal{E}' = \mathcal{E}'']$, то $\mathcal{E}_1$ является подвыражением $\mathcal{E}'$.

$\mathcal{E}_2$ - является подвыражением $\mathcal{E}''$ /по следствию 9.I/.

Поэтому:

(I) переменные с признаками $\dot{s}, \bar{t}, \dot{e}, \bar{\vartheta}$ не войдут в правые части равенств из $P'[\mathcal{E}' = \mathcal{E}'']$

(2) в левые части равенств из $P'[\mathcal{E}' = \mathcal{E}'']$ будут только переменные, которые были в $\mathcal{E}'$ и ~~качаества~~ количество в-хождений любой переменной в равенстве из $P'[\mathcal{E}' = \mathcal{E}'']$ не будет отличаться от количества вхождений этой переменной в равенство $\mathcal{E}' = \mathcal{E}''$ (это следует из определений 9.4 и следствия 9.I).

(3) левая часть любого равенства из $P''[\mathcal{E}' = \mathcal{E}'']$ является ℓ-выражением, т.к, она является подвыражением $\mathcal{E}'$ /по теореме I.I/

Т.к. выполнены (1), (2), (3) и $\Sigma \in S_R$, то и $\Sigma' \in S_R$.

$P_\psi[\Sigma'] = (\psi[X'], \psi[Y], \psi[Z])$

и /по лемме 9.I/ $P_\psi[\Sigma'] \in S_R$

Случай, когда Δ имеет вид $\{(\bar{v}_x \to \mathcal{E})\}$ аналогичен случаю когда $\Delta = \{(\bar{e}_x \to \mathcal{E})\}$

Если Δ имеет вид $\{(\hat{t}_x \to \mathcal{T})\}$, то $X = X' \cup \{\hat{t}_x = \mathcal{T}\}$ и $\hat{t}_x$ не входит в равенства из X .

X'

$\Sigma' = (X' \cup \{\mathcal{T} = \mathcal{T}\}, \Delta /\!/ Y, Z)$ тогда

$$P_\psi[\Sigma'] = (\psi[X], \psi[\Delta /\!/ Y], \psi[Z])$$

т.к. $\psi[X'] \subseteq X, \psi[\Delta /\!/ Y] \in \eta, \psi[Z] \subseteq Z$,

то /по лемме 9.I/ $P_\psi[\Sigma'] \in S_R$. Если Δ имеет вид $\{(\hat{s}_x \to \mathcal{T})\}$ где $\mathcal{T}$ - либо символ, либо s - переменная тогда $X = X' \cup \{\hat{s}_x = \mathcal{T}\}$ и $\Sigma' = (\Delta /\!/ [X] \cup \{\mathcal{T} = \mathcal{T}\}, \Delta /\!/ [Y], Z) \in S_R$.

<u>Теорема 9.6</u>

Если $\Sigma \in S_R$, то $P_\psi[\Sigma] \in S_R$ и $P_1[\Sigma] \in S_R$.

<u>Доказательство</u>

Следует из лемм 9.I и 9.2

<u>Теорема 9.7</u>

Если $\Sigma = (X, Y, Z) \in S_R$, то $P_\psi \circ P_\alpha[\Sigma] \in S_R$.

<u>Доказательство</u>

Рассмотрим $\Sigma' = P_\alpha[\Sigma]$

Если $\Sigma' = \Sigma$ то $P_\psi[\Sigma'] \in S_R$ / по теореме 9.6/.

Если $\Sigma' \neq \Sigma$ то /по определению 9.7/ $\Sigma' = (\Delta /\!/ X, \Delta /\!/ Y, Z)$

где Δ - правильная подстановка, определяемая одним из правил (1) $\div$ (4) определения 9.7.

Если Δ имеет вид $(\bar{e}_x \to \mathcal{E})$ то множество X представлено в виде

$X = X' \cup \{(\bar{e}_x = \mathcal{E})\}$ т.к. $\Sigma \in \mathcal{S}_R$ то $\bar{e}_x$ не входит в отношения из X' и Y т.е. $\Delta // X' = X'$, $\Delta // Y = Y$. Поэтому

$$\Sigma' = (X' \cup_\Delta // \{\bar{e}_x = \mathcal{E}\}, Y, Z) = (X' \cup \{\mathcal{E} = \mathcal{E}\}, Y, Z)$$

Обозначим $X'' = \Delta // [X']$, $Y'' = \Delta // [Y']$

Подстановка $\Delta\, \bar{s}_x$ заменяет на $\mathcal{T}$,где $\mathcal{T}$ либо символ, либо s - переменная.

Поэтому:

(I) т.к. переменные с признаками $\bar{s}, \bar{t}, \bar{e}, \bar{v}$ не входят в правые части отношений из X', то они не входят в правые части отношений из X'' .

(2) т.к. никакая $\bar{t}$-, $\bar{e}$-, $\bar{v}$ - переменная не встречается в отношениях из X дважды, то они не встречаются дважды и в отношениях из X .

(3) т.к. в левые части равенств из X входят только $\bar{s}$-, $\bar{t}$-, $\bar{e}$-, $\bar{v}$- и $\bar{s}$ - переменные, то и в левые части X'' входят только $\bar{s}$-, $\bar{t}$-, $\bar{e}$-, $\bar{v}$, и s - переменные.

(4) т.к. левая часть любого равенства из X является e - выражением, то левая часть любого равенства из X является e - выражением.

Значит $\Sigma' = (X'' \cup \{\mathcal{T} = \mathcal{T}\}, Y'', Z) \in \mathcal{S}_R$

поэтому $P_\psi[\Sigma'] \in \mathcal{S}_R$ / по теореме 9.6/.

Итак, в любом случае $P_\psi[\Sigma'] \in \mathcal{S}_R$

Теорема доказана.

Заметим, что если $\mathcal{E}' = \mathcal{E}''$ - терминальное равенство, $\Delta = \{(\bar{s}_x \to \mathcal{T})\}$ где $\mathcal{T}$ -либо символ, либо s - переменная,то $\Delta // \mathcal{E}' = \Delta // \mathcal{E}''$ - терминальное равенство.

Учитывая это, заметим, что при доказательстве теоремы 9.7 попутно было доказано следующее утверждение.

Теорема 9.8

Если $\Sigma = (X, Y, Z) \in S_R$, $\Sigma' = (X'', Y'', Z'') = P_\psi \circ P_a[\Sigma]$ и $\Sigma' \neq \Sigma$, то

(I) X'' содержит меньше уравнений чем X,

(2) Если в X все уравнения терминальные, то в X'' все уравнения терминальные.

IO. Приведенные системы.

Определение IO . I

Систему $\Sigma \in S_R'$ будем называть приведенной, если $P_\psi[\Sigma] = \Sigma$, $P_\psi \circ P_a[\Sigma] = \Sigma$ и $P_1[\Sigma] = \Sigma$.

Множество всех приведенных систем обозначим через S_R'. Будем называть $\Sigma' \in S_R'$ приведенной формой системы $\Sigma \in S_R$ если Σ' получается из Σ при помощи применения к системе Σ конечного числа раз операций P_ψ, P_1 и $(P_\psi \circ P_a)$

Теорема IO.I

Если $\Sigma \in S_R$, $P_1[\Sigma] = \Sigma$ то:

(I) $P_1 \circ P_\psi[\Sigma] = P_\psi[\Sigma]$

(2) $P_1 \circ P_\psi \circ P_a[\Sigma] = P_\psi \circ P_a[\Sigma]$

Доказательство

Следует из теоремы 9.8 и определений 9.3, 9.5 и 9.7.

Следствие I0.I

Если $\Sigma \in S_R$, $P_1[\Sigma]=\Sigma$, n - натуральное число, то

$$P_1\circ(P_\psi\circ P_a)^n[\Sigma]=(P_\psi\circ P_a)^n[\Sigma]$$

Обозначение

Обозначим через $\bar{n}[\Sigma]$ (где $\Sigma\in S$) число переменных с признаками $\bar{s},\bar{i},\bar{e}$ и $\bar{v}$ входящих в Σ (разные вхождения одной и той же переменной учитываются один раз).

Лемма I0.I

Если $\Sigma\in S_R$ и $P_a[\Sigma]\neq\Sigma$ то $\bar{n}(P_a[\Sigma])<\bar{n}(\Sigma)$

Доказательство

Из определения 9.7 следует, что если $P_a[\Sigma]\neq\Sigma$, то все вхождения некоторой переменной с признаком $\bar{s},\bar{i},\bar{e}$ или $\bar{v}$ в результате действия P_a будут заменены в Σ на некоторое значение, причем (из условия $\Sigma\in S_R$ и определения 9.6 и 9.7) это значение не будет содержать переменных с признаками $\bar{s},\bar{i},\bar{e}$ и $\bar{v}$.

Лемма I0.2

Если $\Sigma\in S_R$ то $\bar{n}(\Sigma)\leqslant\bar{n}(P_\psi[\Sigma])$ и $\bar{n}(\Sigma)=\bar{n}(P_1[\Sigma])$.

Доказательство

Следует из определений 9.3 и 9.5.

Теорема I0.2

Если $\Sigma\in S_R$, $P_\psi[\Sigma]=\Sigma$, $n=\bar{n}(\Sigma)$ то существует такое $k\leqslant n$, что для всех $m=0,1,\dots$ выполняется $(P_\psi\circ P_a)^{k+m}[\Sigma]=$
$=(P_\psi\circ P_a)^k[\Sigma]$,

Доказательство

Обозначим через Σ_i систему $(P_\psi\circ P_a)^i[\Sigma]$, т.е. $\Sigma_0 = \Sigma \cup \Sigma_{i+1} = (P_\psi \circ P_a)[\Sigma_i]$ $(i=0,1,2,\dots)$ ~~Заметим, что~~

Заметим, что $P_\psi[\Sigma_0] = \Sigma_0$ и

т.е. $P_\psi[\Sigma_{i+1}] = P_\psi \circ P_\psi \circ P_a[\Sigma_i] = P_\psi \circ P_a[\Sigma_i] = \Sigma_{i+1}$,
$P_\psi[\Sigma_i] = \Sigma_i$ $(i=0,1,2,\dots)$.

Докажем, что существует такое $k \le n$ что $P_a[\Sigma_k] = \Sigma_k$,

используя метод доказательства от противного. Пусть $P_a[\Sigma_k] \ne \Sigma_k$ для $k=0,1,\dots,n$ тогда (леммы I0.I и I0.2) $\bar{n}(\Sigma_k) > \bar{n}(P_a \circ [\Sigma_k]) \ge \bar{n}(P_\psi \circ P_a[\Sigma_k]) = \bar{n}(\Sigma_{k+1})$ т.е. $\bar{n}(\Sigma_k) - 1 \ge \bar{n}(\Sigma_{k+1})$ $\quad k=0,1,\dots,n$ больше места

Поэтому $\sum_{k=0}^{n} \bar{n}(\Sigma_k) - (n+1) \ge \sum_{k=0}^{n} \bar{n}(\Sigma_{k+1})$,

или $\bar{n}(\Sigma_0) - (n+1) = -1 \ge \bar{n}(\Sigma_{n+1})$ противоречие. Таким образом существует $k \le n$ такое, что $P_a[\Sigma_k] = [\Sigma_k]$ но тогда

$(P_\psi \circ P_a)[\Sigma_k] = P_\psi[\Sigma_k] = \Sigma_k$.

Значит $(P_\psi \circ P_a)^m [\Sigma_k] = \Sigma_k$ т.е. $(P_\psi \circ P_a)^{k+m}[\Sigma] = (P_\psi \circ P_a)^k [\Sigma]$
$(m=0,1,2,\dots)$

Теорема I0.3

Если $\Sigma \in S_R$, $n = \bar{n}(\Sigma)$ то существует $k \le n$ такое, что $\Sigma' = (P_\psi \circ P_a)^k_0 P_\psi \circ P_1[\Sigma]$ является приведенной формой Σ.

Доказательство

Введем обозначение $\Sigma_0 = P_\psi \circ P_1[\Sigma]$, $\Sigma_i = (P_\psi \circ P_a)^i [\Sigma_0]$ $(i=1,2,\dots)$

Т.к. $P_1[P_1[\Sigma]] = P_1[\Sigma]$ то (по теореме I0.I и сдедствию I0.I)

$P_1[\Sigma_0] = \Sigma_0$ и $P_1[\Sigma_i] = \Sigma_i$ (I) $(i=1,2,\dots)$

Аналогичным свойством обладает и P_ψ:

$P_\psi[\Sigma_0] = P_\psi \circ P_\psi \circ P_1[\Sigma] = P_\psi \circ P_1[\Sigma] = \Sigma_0$

и $P_\psi[\Sigma_i] = P_\psi \circ P_\psi \circ P_a[\Sigma_{i-1}] = P_\psi \circ P_a[\Sigma_{i-1}] = \Sigma_i$ (2) $(i=0,1,2,\dots)$

Т.к. $P_\psi[\Sigma_0] = \Sigma_0$ ~~то~~ (по теореме I0.2) существует такое $k \le n(\Sigma_0)$ что $(P_\psi \circ P_a)^{k+1}[\Sigma_0] = (P_\psi \circ P_a)^k [\Sigma_0]$ (3)

Т.е. (см. (I) ÷ (3)) существует $k \leq \hat{n}(\Sigma_0) \leq \hat{n}(\Sigma)$ такое, что $P_\psi[\Sigma_k]=\Sigma_k$; $P_1[\Sigma_k]=\Sigma_k$; $(P_\psi \circ P_a)[\Sigma_k]=\Sigma_k$; т.е. $\Sigma_k \in S'_R$.

Т.к. $\Sigma_k=(P_\psi \circ P_a)^k \circ P_\psi \circ P_1[\Sigma]$ то Σ_k является приведенной формой Σ.

Обозначание

Обозначим через P отображение, реализуемое некоторым алгоритмом и ставящее в соответствие $\Sigma \in S_R$ систему $\Sigma' \in S'_R$ являющуюся приведенной формой Σ.

Например, в качестве такого отображения можно взять (см. теорему I0.3) P определяемое следующим равенством:

$$P(\Sigma)=(P_\psi \circ P_a)^{\hat{n}(\Sigma)} \circ (P_\psi \circ P_1)[\Sigma]$$

11. Расщепления

Определение II.I

Будем называть расщеплением конечные множества сужений следующих видов:

(1) $\{(e_i \to \square), (e_i \to \vartheta_i)\}$

(2) $\{(e_i \to \square), (e_i \to t_j e_i)\}$

(3) $\{(e_i \to \square), (e_i \to e_i t_j)\}$

(4) $\{(\vartheta_i \to t_j e_i)\}$

(5) $\{(\vartheta_i \to e_i t_j)\}$

(6) $\{(t_i \to s_i), (t_i \to (e_i))\}$

(7) $\{(t_i \to \sigma), (t_i \to t[\sigma]_i)\}$

(8) $\{(t_i \to s_k), (t_i \to t[s_k]_i)\}$

(9) $\{(s_i \to \sigma), (s_i \to s[\sigma]_i)\}$

(I0) $\{(s_i \to s_k), (s_i \to s[s_k]_i)\}$

где i, j, k -индексы, σ - символ.

Индекс j в расщеплениях вида (2) ÷ (5) будем называть новым. Старыми переменными будем называть

e_i в расщеплениях видов (1) ÷ (3),

ϑ_i в расщеплениях видов (4) ÷ (5),

t_i в расщеплениях видов (6) и (7),

t_i и $\mathfrak{z}_k$ в расщеплениях вида (8),

$\mathfrak{z}_i$ в расщеплениях вида (9),

$\mathfrak{z}_i$ и $\mathfrak{z}_k$ в расщепления вида (10).

Определение II.2

Пусть $(\mathcal{E}, \mathcal{N})$ класс, а $P=\{\delta_1,\dots,\delta_n\}$ расщепление, такое, что все старые переменные P входят в $(\mathcal{E}, \mathcal{N})$ а новые индексы P (если они есть) не используются в $(\mathcal{E}, \mathcal{N})$.

Тогда множество классов $K=\{\delta_1//(\mathcal{E},\mathcal{N}),\dots,\delta_n//(\mathcal{E},\mathcal{N})\}$ назовем непосредственным расщеплением класса $(\mathcal{E}, \mathcal{N})$ порожденным P.

Лемма II.I

Если Δ -правильная подстановка такая, что $\mathcal{E}_0 \doteq \Delta // \mathcal{E}$ где $\mathcal{E}_0 \in \varepsilon_0$ и $\mathcal{E} \in \varepsilon_t$ то

(1) $\|\mathcal{E}\| \subset \|\Delta\|$

(2) Для любой $\vartheta \in \|\mathcal{E}\|$ выполнено $\Delta // [\vartheta] \in \varepsilon_0$

Доказательство

маленькая к

(1) От противного. Если Какая-то переменная из $\mathcal{E}$ не принимает значения в Δ, то она будет входить в $\Delta // [\mathcal{E}] \doteq \mathcal{E}_0$ что противоречит тому, что $\mathcal{E}_0 \in \varepsilon_0$

(2) От противного. Если значение некоторой переменной из $\mathcal{E}$ в Δ будет содержать переменные или знаки k то в $\mathcal{E}_0 \doteq \Delta // \mathcal{E}$ будут входить переменные или знаки k что противоречит тому, что $\mathcal{E}_0 \in \varepsilon_0$.

Лемма II.2

Если Δ_1, Δ_2 - правильные подстановки,

$\Delta_1 \cup \Delta_2$ - правильная подстановка и для любой $v \in \|\Delta_2\|$ выполненео, что $\Delta_1 /\!/ [v] \in \mathcal{E}_0$, то $\Delta_1 \cdot \Delta_2 = \Delta_1 \cup \Delta_2$

Доказательство

По определению 3.2

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 = \{(v \to \Delta_1 /\!/ [v]) \mid v \in \|\Delta_1\| \setminus \|\Delta_2\|\} \cup ; \{(v \to \Delta_1 \circ \Delta_2 /\!/ [v]) \mid v \in \|\Delta_2\|\}$$

Т.к. $\Delta_1 \cup \Delta_2$ правильная подстановка, то (по определению 2.I)

$\|\Delta_1\| \cap \|\Delta_2\| = \phi$ т.е. $\|\Delta_1\| \setminus \|\Delta_2\| = \|\Delta_1\|$.

Т.к. для любой $v \in \|\Delta_2\|$ выполнено $\Delta_2 /\!/ [v] \in \mathcal{E}_0$ то (по определению 2.I) $\Delta_1 /\!/ \circ \Delta_2 /\!/ [v] = \Delta_2 /\!/ [v]$. Поэтому $\Delta_1 \cdot \Delta_2 = \{(v \to \Delta_1 /\!/ [v]) \mid v \in \|\Delta_1\|\} \cup \{(v \to \Delta_2 /\!/ [v]) \mid v \in \|\Delta_2\|\} = \Delta_1 \cup \Delta_2$

Лемма II.3

Если $\Delta, \Delta', \Delta'', \Delta'''$ - правильные подстановки $\Delta = \Delta' \cdot (\Delta'' \cdot \Delta''')$, $\mathscr{E}_0 = \Delta /\!/ \mathscr{E}$, $\Psi[\Delta /\!/ \mathscr{N}] = \phi$, $\mathscr{E}' = \Delta'' /\!/ \mathscr{E}$, $\mathscr{N}' = \Delta''' /\!/ \mathscr{N}$,

где $\mathscr{E}_0 \in \mathcal{E}_0$, $\mathscr{E} \in \mathcal{E}_t$, $\mathscr{N}$ и $\mathscr{N}' \in \eta$, то $\mathscr{E}_0 \in (\mathscr{E}', \mathscr{N}')$

Доказательство

Заметим, что $\Delta /\!/ = \Delta' /\!/ \circ \Delta'' /\!/ \circ \Delta''' /\!/ = (\Delta' \cdot \Delta'') /\!/ \circ \Delta''' /\!/$

Поэтому $(\Delta' \cdot \Delta'') /\!/ \mathscr{E}' = \Delta /\!/ \mathscr{E} = \mathscr{E}_0$ и $\Psi[(\Delta' \cdot \Delta'') /\!/ \mathscr{N}'] = \Psi[\Delta' \mathscr{N}] = \phi$

т.е. $\mathscr{E}_0 \in (\mathscr{E}', \mathscr{N}')$

Лемма II.4

Если Δ правильная подстановка, такая, что $\mathscr{E}_0 = \Delta /\!/ \mathscr{E}$, $\Psi[\Delta /\!/ \mathscr{N}] = \phi$ (где $\mathscr{E}_0 \in \mathcal{E}_0$, $\mathscr{E} \in \mathcal{E}_t$, $\mathscr{N} \in \eta$), то существует Δ_1 правильная подстановка, такая, что $\mathscr{E}_0 = \Delta_1 /\!/ \mathscr{E}$, $\Psi[\Delta_1 /\!/ \mathscr{N}] = \phi$,

$\|\Delta_1\| = \|\mathscr{E}\| \cup \|\mathscr{N}\|$

Доказательство

Рассмотрим $\Delta_1 = \{(v \to \Delta_2 /\!/ [v]) \mid v \in \|\mathscr{E}\| \cup \|\mathscr{N}\|\}$

По построению $\|\Delta_1\| = \|\mathcal{E}\| \cup \|\mathcal{N}\|$ и (из определения 2.2) $\Delta /\!/ \mathcal{E} = \Delta_1 /\!/ \mathcal{E}$, $\Delta /\!/ \mathcal{N} = \Delta_1 /\!/ \mathcal{N}$.

Теорема II.I

Если $K = \{(\mathcal{E}_1, \mathcal{N}_1), \dots, (\mathcal{E}_n, \mathcal{N}_n)\}$ является непосредственным ращеплением класса $(\mathcal{E}, \mathcal{N})$ порожденным $P = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ и $\mathcal{T}_1[\mathcal{N}] = \phi$ то $(\mathcal{E}, \mathcal{N}) = \bigcup_{k=1}^{n} (\mathcal{E}_k, \mathcal{N}_k)$

Доказательство

Т.К. $(\mathcal{E}_i, \mathcal{N}_i) = \delta_i /\!/ (\mathcal{E}, \mathcal{N})$ и $\mathcal{T}_1[\mathcal{N}] = \phi$ то (по теореме 8.I) или $(\mathcal{E}_i \mathcal{N}_i) = \phi$ или $(\mathcal{E}_i, \mathcal{N}_i) \leq (\mathcal{E}, \mathcal{N})$ т.е. в любом случае (по теореме 5.I) $(\mathcal{E}, \mathcal{N}) \supseteq (\mathcal{E}_i, \mathcal{N}_i)$.

Поэтому $(\mathcal{E}, \mathcal{N}) \supseteq \bigcup_{k=1}^{n} (\mathcal{E}_k, \mathcal{N}_k)$.

Докажем обратное включение.

Пусть $\mathcal{E}_0 \in (\mathcal{E}, \mathcal{N})$. Тогда (по определению 5.2) существует правильная подстановка Δ, такая, что $\mathcal{E}_0 = \Delta /\!/ \mathcal{E}$ и $\Psi[\Delta /\!/ \mathcal{N}] = \phi$ Будем считать (см.лемму II.4) что $\|\Delta\| = \|\mathcal{E}\| \cup \|\mathcal{N}\|$

Докажем, что существует такое i, что $\mathcal{E}_0 \in (\mathcal{E}_i, \mathcal{N}_i)$

Для этого рассмотрим все возможные виды расщепления P, в соответствии с опоределением II.I

(I) $P = \{\delta_1, \delta_2\}$ где δ_1 имеет вид $(e_i \to \square)$, δ_2 имеет вид $(e_i \to \vartheta_i)$ $\mathcal{E}_1 = \{\delta_1\} /\!/ \mathcal{E}$, $\mathcal{N}_1 = \{\delta_2\} /\!/ \mathcal{N}$.
$\mathcal{E}_2 = \{\delta_2\} /\!/ \mathcal{E}$, $\mathcal{N}_2 = \{\delta_2\} /\!/ \mathcal{N}$.

По условию теоремы $e_i \in \|\mathcal{E}\|$ следовательно (по лемме II.I) $e_i \in \|\Delta\|$ и $\Delta /\!/ [e_i] = \mathcal{E}' \in \varepsilon_0$ Рассмотрим $\Delta' = \Delta \setminus \{(e_i \to \mathcal{E}')\}$

Из леммы II.2 следует, что $\Delta = \Delta' \cup \{(e_i \to \mathcal{E}')\} = \Delta' \cdot \{(e_i \to \mathcal{E}')\}$

Для $\mathcal{E}'$ возможны два случая:

(I.I) $\mathcal{E}' = \square$, тогда $\Delta = \Delta' \{\delta_1\} = \Delta' (\phi \cdot \{\delta_1\})$ и (по лемме II.3) $\mathcal{E}_0 \in (\mathcal{E}_1, \mathcal{N}_1)$

(I.2) $\mathcal{E}' \neq \square$ В этом случае $\Delta'' = \{(v_i \to \mathcal{E}')\}$ - правильная подстановка и $\Delta''\cdot\{\delta_2\} = \{(e_i \to \mathcal{E}')\}$ т.е. $\Delta = \Delta'\cdot(\Delta''\cdot\{\delta_2\})$ и по лемме II.3 $\mathcal{E}_0 \in (\mathcal{E}_2, \mathcal{N}_2)$

Случай (I) разобран.

(2) $P = \{\delta_1, \delta_2\}$ где δ_1 имеет вид $(e_1 \to \square)$

δ_2 имеет вид $(e_i \to t_j e_i)$

$$\mathcal{E}_1 = \{\delta_1\}//\mathcal{E}, \quad \mathcal{N}_1 = \{\delta_1\}//\mathcal{N}, \quad \mathcal{E}_2 = \{\delta_2\}//\mathcal{E}, \quad \mathcal{N}_2 = \{\delta_2\}//\mathcal{N}$$

По условию теоремы $e_i \in \|\mathcal{E}\|$ следовательно (по лемме 1.1) $e_i \in \|\Delta\|$ и $\Delta[e_i] = \mathcal{E}' \in \mathcal{E}_0$

Рассмотрим $\Delta' = \Delta \setminus \{(e_i \to \mathcal{E}')\}$ Из леммы II.2 следует, что $\Delta = \Delta' \cup \{(e_i \to \mathcal{E}')\} = \Delta'\cdot\{(e_i \to \mathcal{E}')\}$ Для $\mathcal{E}'$ возможны два случая.

(2.I) $\mathcal{E}' \equiv \square$ тогда $\Delta = \Delta'\cdot(\phi\cdot\{\delta_1\})$ и (по лемме II.3) $\mathcal{E}_0 \in (\mathcal{E}_1, \mathcal{N}_1)$

(2.2) $\mathcal{E}' \equiv \square$ Т.к. $\mathcal{E}' \in \mathcal{E}_0$ то $\mathcal{E}' \doteq \mathcal{T}''\mathcal{E}''$ где $\mathcal{T}''$ -жесткий терм $\mathcal{T}''$ и $\mathcal{E}'' \in \mathcal{E}_0$ Тогда подстановка $\Delta'' = \{(t_j \to \mathcal{T}), (e_i \to \mathcal{E}'')\}$ является правильной подстановкой.

$$\Delta''\cdot\{\delta_2\} = \{(t_j \to \mathcal{T}), (e_i \to \mathcal{T}\mathcal{E}'')\}$$

Т.к. t_j и e_i не входят в $\|\Delta\|$, то $\Delta' \cup (\Delta''\cdot\{\delta_2\})$ правильная подстановка.

Поэтому (лемма II.2)

$$\Delta'\cdot(\Delta''\cdot\{\delta_2\}) = \Delta' \cup \{(t_j \to \mathcal{T}), (e_i \to \mathcal{T}\mathcal{E}'')\} = \Delta \cup \{(t_j \to \mathcal{T})\}$$

Обозначим $\Delta_1 = \Delta \cup \{(t_j \to \mathcal{T})\}$ Т.к. для всех переменных v из $\mathcal{E}$ и $\mathcal{N}$ $\Delta_1//[v] = \Delta//[v]$, то (см. определение 2.2)

~~Т.к~~ $\Delta_1//\mathcal{E} = \Delta//\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ и $\Psi[\Delta_1//\mathcal{N}] = \Psi[\Delta//\mathcal{N}] = \phi$

Т.к. $\Delta_1 = \Delta'\cdot(\Delta''\cdot\{\delta_2\})$, то (из леммы II.3) $\mathcal{E}_0 \in (\mathcal{E}_2, \mathcal{N}_2)$.

Случай 2 полностью рассмотрен.

Случаи, когда P имеет вид соответсвующий видам (3)÷(6) разбираются аналогично случаям (2) и (I).

(7) $P=\{\delta_1,\delta_2\}$ где δ_1 имеет вид $(t_i\to\sigma)$

δ_2 имеет вид $(t_i\to t[\sigma]_i)$

Т.к. $t_i\in\|\mathcal{E}\|$,то по (лемме I.I) $t_i\in\|\Delta\|$ и $\Delta/\!/[t_i]\equiv\mathcal{T}'\in\varepsilon_0$

Рассмотрим $\Delta'=\Delta\setminus\{(t_i\to\mathcal{T}')\}$ Из леммы II.2 следует,что

$\Delta=\Delta'\cup\{(t_i\to\mathcal{T}')\}=\Delta'\cdot\{(t_i\to\mathcal{T}')\}$. Для данного P имеем:

$\mathcal{E}_1=\{\delta_1\}/\!/\mathcal{E}$, $\mathcal{N}_1=\{\delta_1\}/\!/\mathcal{N}$,

$\mathcal{E}_2=\mathcal{E}$, $\mathcal{N}_2=\mathcal{N}\cup\{t_i\neq\sigma\}$.

Для $\mathcal{T}'$ возможны два случая:

(7.I) $\mathcal{T}'\equiv\sigma$ тогда $\Delta=\Delta'\cdot\{\delta_1\}=\Delta'\cdot(\phi\cdot\{\delta_1\})$

и по лемме II.3 $\mathcal{E}_0\in(\mathcal{E}_1;\mathcal{N}_1)$.

(7.2) $\mathcal{T}'\not\equiv\sigma$ тогда, т.к. $\mathcal{T}'\in\varepsilon_0$ неравенство $\mathcal{T}'\neq\sigma$ является тавтологией (см. определение 4.2).

$\Delta/\!/\mathcal{E}_2\equiv\Delta/\!/\mathcal{E}\equiv\mathcal{E}_0$,

$\Psi[\Delta/\!/\mathcal{N}_2]=\Psi[\Delta/\!/\mathcal{N}]\cup\Psi[\Delta/\!/\{t_i\neq\sigma\}]=\phi\cup\Psi[\{\mathcal{T}'\neq\sigma\}]=\phi$

т.е. $\mathcal{E}_0\in(\mathcal{E}_2,\mathcal{N}_2)$

Случай (7) полностью рассмотрен

Случаи (8)÷(I0) рассматриваются аналогично случаю (7).

Итак в любом случае существует i такое,что

$\mathcal{E}_0\in(\mathcal{E}_i,\mathcal{N}_i)$ т.е. $\mathcal{E}_0\in(\mathcal{E},\mathcal{N})$ влечет $\mathcal{E}_0\in\bigcup_{i=1}^{n}(\mathcal{E}_i,\mathcal{N}_i)$

Поэтому $(\mathcal{E},\mathcal{N})\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(\mathcal{E}_i,\mathcal{N}_i)$

12. Сужение над системами. Терминальные системы.

Определение 12.1

Результатом применения сужения δ к системе $\Sigma=(X,Y,Z)\in S$ назовем систему Σ', определяемую по следующим правилам:

$\Sigma'=(\{\delta\}/\!/X,\{\delta\}/\!/Y,\{\delta\}/\!/Z)$ если $\{\delta\}$ является подстановкой.

$\Sigma'=(X,Y\setminus\{t_i\neq\mathcal{T}\},Z\cup\{t_i\neq\mathcal{T}\})$ если δ имеет вид $(t_i\to t[\mathcal{T}]i)$,

$\Sigma'=(X,Y\setminus\{s_i\neq\mathcal{T}\}_2,Z\cup\{s_i\neq\mathcal{T}\}$, если δ имеет вид $(s_i\to s[\mathcal{T}]i)$.

Результат применения сужения δ к системе Σ будем обозначать через $\delta/\!/\Sigma$

Теоремеа 12.1

Если δ - сужение, в δ не используются $\bar{s}$-, $\bar{t}$; $\bar{e}$-, $\bar{v}$- - переменные и $\Sigma\in S_R$, то $\delta/\!/[\Sigma]\in S_R$.

Доказательство

Следует из определений 8.1, 12.1 и 9.6.

Определение 12.2

Пусть Σ - система, а $P=\{\delta_1,\dots,\delta_n\}$ - расщепление такое, что в P нет $\bar{s}$-, $\bar{t}$-, $\bar{e}$- и $\bar{v}$ - переменных, все старые переменные P входят в Σ, а новые индексы P (если они есть) не используются в Σ.

Тогда множество систем $M=\{\delta_1/\!/\Sigma,\dots,\delta_n/\!/\Sigma\}$ назовем непосредственным расщеплением системы Σ, порожденным P.

Определение 12.3

Приведенную систему $\Sigma=(X,Y,Z)$ назовем:

(1) ϕ - терминальной, если $\mathcal{T}[Z]\neq\phi$

(2) F - терминальной, если $\mathcal{T}[Z]=\phi$ и $\mathcal{T}[X\cup Y]\neq\phi$ или $\mathcal{T}[Z]=\phi$ и существуют $\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2\in\varepsilon_e$

такие, что неравенство $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$ входит в Z и равенство $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ входит в X.

(3) T - терминальной, если $\mathcal{H}[Z] = \phi$ и $X = Y = \phi$

Систему $\Sigma \in S'_R$ будем называть терминальной, если она является или ϕ, или F, или T - терминальной.

Обозначим множество всех терминальных систем через S^T, множество всех ϕ - терминальных ~~вершин~~ систем через S_ϕ, множество всех F - терминальных ~~вершин~~ систем через S_F, множество всех T терминальных ~~вершин~~ систем через S^T.

Теорема I2.2

Для теминальной системы имеет место один и только один из следующих трех случаев:

(I) она является ϕ терминальной

(2) она является F терминальной

(3) она является T терминальной

т.е. $S^T = S_\phi \cup S_F \cup S_T$, $S_F \cap S_T = \phi$, $S_\phi \cap S_F = \phi$, $S_\phi \cap S_T = \phi$

Доказательство

Следует из определения I2.3

I3. Генерация расщепления. Дерево сужений.

Теорема I3.I

Пусть $\Sigma = (X, Y, Z) \in S'_R \setminus S^T$ т.е. приведенная, нетерминальная

Тогда вид любого из равенства X совпадает с одним из ниже перечисленных:

(I) $\sigma = s_i$ (2) $\sigma = t_i$ (3) $s_k = \sigma$

(4) $s_k = s_i$ (5) $s_k = t_i$ (6) $\bar{s}_k = t_i$

(7) $(\mathcal{E}) = t_i$ (8) $\bar{v}_k = e_{i_1} \ldots e_{i_n}$ (9) $\mathcal{T}'\mathcal{E}_1 = e_i \mathcal{E}_2$

(I0) $\mathcal{T}'\mathcal{E}_1 = q\, \mathcal{E}_2$ (II) $\mathcal{E}_1 \mathcal{T}' = \mathcal{E}_2 e_i$ (I2) $\mathcal{E}_1 \mathcal{T}' = \mathcal{E}_2\, v_i$

(I3) $\square = e_{i_1} \ldots e_{i_n}$

и вид любого неравенства из Y не содержащего $\bar{s}$-, $\bar{t}$-, $\bar{e}$-, $\bar{\vartheta}$- переменные совпадает с одним из ниже перечисленных:

(14) $s_i \neq \sigma$ (15) $s_i \neq s_k$

(16) $t_i \neq \sigma$ (17) $t_i \neq s_k$

где $k, i, i_1 \ldots i_n$ - индексы, $k \neq i$, σ - символ, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \mathcal{E}_t$, $\mathcal{T}'$ - жесткий терм.

Доказательство

Т.К. $\Sigma \in S'_R$ то в X - все равенства терминальные, не являющиеся ни противоречием, ни тавтологией. Такие равенства должны иметь вид, совпадающий с одним из видов (1) ÷ (13) (это следует из определений 7.1, 9.4, 9.?).

Т.к. в Y нет противоречий и тавтологий, то любое неравенство из Y не содержащее $\bar{s}$-, $\bar{t}$-, $\bar{e}$-, $\bar{\vartheta}$- - переменных должно иметь вид, совпадающий с одним из видов (14) ÷ (17) (это следует из определений 4.1 и 4.2).

Определение 13.1

Будем говорить, что система $\Sigma = (X, Y, Z) \in S_R$ правильно специфицирована, если любая переменная с признаками $\bar{s}, \bar{t}, \bar{e}$ или $\bar{\vartheta}$, входящая в Y, входит в X.

Теорема 13.2

Если $\Sigma = (X, Y, Z)$ - правильноспецифицированная δ- сужение, не содержащее $\bar{s}$-, $\bar{t}$-, $\bar{e}$-, $\bar{\vartheta}$ - переменных, то системы $P_\psi[\Sigma], P_\psi \circ P_a[\Sigma], P_1[\Sigma], P[\Sigma], \delta /\!/ [\Sigma]$ - правильно специфицированые.

Доказательство

(I) Равенство- тавтология их X не может содержать $\mathfrak{s}$-; t-; e-; ϑ- переменных, т,к, они НЕ могут входить в правую часть равенства, а у равенств-тавтологий правая часть текстуально совпадает с левой [redacted] частью. Поэтому $\Psi[X]$ будет содержать все $\mathfrak{s}$-; t-; e-; ϑ - переменные, входящие в X. Следовательно $P_\Psi[\Sigma]$ - правильно специфицированная.

(2) Из определений 9.3 и 9.7 следует, что $P_\Psi \circ P_a[\Sigma]$ правильно специфицированная

(3) Из определения 9.5 следует, что $P_1[\Sigma]$ правильно специфицированная.

(4) Из (I)÷(3) следует что $P[\Sigma]$ правильно специфицированная.

(5) Из определения I2.I и условия на δ следует, что $\delta /\!/ \Sigma$ правильно специфицированная.

Определение I3.2

Пусть $\mathcal{E}_1 \bar{\neq} \mathcal{E}_2$ - отношение равенство или неравенство, а $P = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ - расщепление.

Тагда будем говорить, что это отношение требует расщепления P и писать $\mathcal{E}_1 \bar{\neq} \mathcal{E}_2 \vdash P$ если выполнено одно из следующих условий.

(I) Отношение имеет вид $\sigma = \mathfrak{s}_i$ или $\mathfrak{s}_i = \sigma$

$$P = \{(\mathfrak{s}_i \to \sigma), (\mathfrak{s}_i \to \mathfrak{s}[\sigma]_i)\}$$

(2) Отношение имеет вид $\sigma = t_i$ и $P = \{(t_i \to \sigma), (t_i \to t[\sigma]_i)\}$

(3) Отношение имеет вид $\mathfrak{s}_k = t_i$ и $P = \{(t_i \to \mathfrak{s}_k), (t_i \to t[\mathfrak{s}_k]_i)\}$

(4) Отношение имеет вид $\mathfrak{s}_k = \mathfrak{s}_i$ и $P = \{(\mathfrak{s}_i \to \mathfrak{s}_k), (\mathfrak{s}_i \to \mathfrak{s}[\mathfrak{s}_k]_i)\}$

(5) Отношение имеет вид $\bar{s}_k = t_i$ и $P=\{(t_i \to s_i),(t_i \to (e_i))\}$

(6) Отношение имеет вид $(\mathcal{E}) = t_i$ и $P=\{(t_i \to s_i),(t_i \to e_i)\}$

(7) Отношение имеет вид $\mathfrak{V}_k = e_{i_1} \ldots e_{i_n}$,

$$P=\{(e_{i_k} \to \square),(e_{i_k} \to \mathfrak{V}_{i_k})\}$$

(8) Отношение имеет вид $\mathcal{T}'\mathcal{E}_1 = e_i \mathcal{E}_2$ и $P=\{(e_i \to \square),(e_i \to t_j e_i)\}$

(9) Отношение имеет вид $\mathcal{T}'\mathcal{E}_1 = v_i \mathcal{E}_2$ и $P=\{(v_i \to t_j e_i)\}$

(I0) Отношение имеет вид $\mathcal{E}_1 \mathcal{T}' = \mathcal{E}_2 e_i$ и $P=\{(e_i \to \square),(e_i \to e_i t_j\}$

(II) Отношение имеет вид $\mathcal{E}_1 \mathcal{T}' = \mathcal{E}_2 v_i$ и $P=\{(v_i \to e_i t_j)\}$

(I2) Отношение имеет вид $\square = e_{i_1} \ldots e_{i_n}$ и $P=\{(e_{i_k} \to \square),(e_{i_k} \to v_{i_k})\}$ $/k \in [1,n]/$

(I3) Отношение имеет вид $s_i \neq \sigma$ и $P=\{(s_i \to \sigma),(s_i \to s[\sigma]_i)\}$

(I4) Отношение имеет вид $s_i \neq s_k$ и $P=\{(s_i \to s_k),(s_i \to s[s_k]_i)\}$

(I5) Отношение имеет вид $t_i \neq s_k$ и $P=\{(t_i \to s_k),(t_i \to t[s_k]_i)\}$

(I6) Отношение имеет вид $t_i \neq \sigma$ и $P=\{(t_i \to \sigma),(t_i \to t[\sigma]_i)\}$

где $k, i, i_1, \ldots, i_n$ - индексы, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \mathcal{E}_t$, $\mathcal{T}$ - жесткий терм.

Замечание I3.I

Из определения I3.2 следует,что если отношение $\mathcal{E}_1 \bar{\neq} \mathcal{E}_2$ имеет вид совпадающий с одним из видов , перечисленных в пунктах (I) ÷ (I6) определения I3.2, то можно по виду $\mathcal{E}_1 \bar{\neq} \mathcal{E}_2$ выписать расщепление P , такое, что $\mathcal{E}_1 \bar{\neq} \mathcal{E}_2 \vdash P$.

Определение I3.3

Будем называть $\Sigma \in S$ нераскрытой, если $\Sigma \in S_p'$, $\Sigma \notin S^T$ и Σ - правильно специфицираванa. Множество всех нераскрытых систем обозначим через S^U .

Теорема I3.3

Если $\Sigma = (X, Y, Z) \in S^U$, то в $X \cup Y$ есть отношение, требующее расщепления,

Доказательство

Если $X=\emptyset$, то (в силу теоремы I3.I, определения I3.2 и замечания I3.I) любое равенство из X требует некоторого расщепления.

Если $X=\emptyset$, то $Y\neq\emptyset$ (т.к. $\Sigma\notin S^T$) и в Y нет $\bar{\jmath}$-, $\bar{i}$-, $\bar{e}$-, $\bar{v}$ - переменных (т.к. $\Sigma\in S^U$). Тогда, в силу теоремы I3.I, определения I3.2 и замечания I3.I, любое неравенство из Y требует некоторого расщепления.

Определение I3.4

Пусть $\Sigma=(X,Y,Z)\in S^U$, P - расщепление. Тогда будем говорить, что Σ требует расщепления P, если существует отношение в $X\cup Y$ требующее расщепления P.

Замечание I3.2

В силу теоремы I3.3, если $\Sigma=(X,Y,Z)\in S^U$, то существует P - расщепление, такое, что Σ требует P, причем (см. замечание I3.I, теоремы I3.I и I3.3 и определения I3.2) можно, взяв любое равенство из X или неравенство из Y, не содержащее $\bar{\jmath}$-, $\bar{i}$-, $\bar{e}$-, $\bar{v}$ - переменных, составить расщепление P требуемое системой Σ.

Обозначение

Обозначим через γ отображение, реализуемое некоторым алгоритмом и ставящее в соответствие любой системе $\Sigma\in S^U$ расщепление, которое требует Σ и новые индексы которого не используются в Σ. Т.е. если $\Sigma\in S^U$ то Σ требует расщепления $\gamma[\Sigma]$.

Теорема I3.4

Если $\Sigma \in S^U$, $P = \gamma[\Sigma] = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ то $M = \{\delta_1 /\!/ \Sigma, \dots, \delta_n /\!/ \Sigma\}$ является непосредственным расщеплением Σ .

Доказательство

Следует из определений I2.2 и определения γ .

Теорема I3.5

Если $\Sigma \in S^U$, $\gamma[\Sigma] = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ то $P[\delta_i /\!/ [\Sigma]] \in S^U \cup S^T \; (i = 1, \dots, n)$

Доказательство

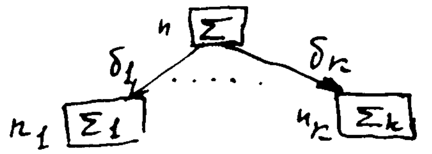
Следует из теоремы I3.2, определения отображения P и определения I3.3.

Определение I3.5

Деревом сужений системы Σ^0 (где Σ^0 - правильно специфицированная, $\Sigma^0 \in S_R$) назовем дерево удовлетворяющее следующим условиям:

(I) В каждой вершине этого дерева записана система, а каждому ребру приписано некоторое сужение. В корневой вершине записана $P[\Sigma^0]$.

(2) Если вершина n , в которой записана система Σ имеет k дочерних вершин $n_1, \dots, n_k$, в вершине n_i записана система Σ_i , а дуге ведущей из вершины n в вершину n_i приписано сужение δ_i / см. рис.I/



(рис. 1)

то должны выполняться следующие условия:

$$\{\delta_1, \dots, \delta_k\} = \gamma[\Sigma]$$

$$\Sigma_i = P[\delta_i /\!/ \Sigma] \quad (i = 1, \dots, k)$$

Теорема I3.6

Если $\Sigma^{0} \in S_R$ - правильно специфицирована, а Σ - система записаная в некоторой вершине дерева сужений Σ^{0} то $\Sigma \in S^{U} \cup S^{T}$.

Доказательство

От противного. Рассмотрим вершину n такую, что она имеет минимальную глубину среди всех вершин, в которых записаны системы не из $S^{U} \cup S^{T}$

Вершина n не может быть корневой, т.к. $P[\Sigma_0] \in S^{U} \cup S^{T}$ /по теореме I3.2, определению оператора P и определению I3.3/.

Рассмотрим вершину n' - родителя вершины n. Система Σ записанная в n' должна принадлежать $S^{U} \cup S^{T}$ (по выбору n). $\Sigma \notin S^{T}$ т.к. γ не определена на S^{T} и значит вершины в которых записаны системы из S^{T} могут быть только терминальными. Значит $\Sigma' \in S^{U}$. Пусть δ - сужение приписанное ребру ведущему от n' к n. Тогда в вершине n записана система $\Sigma = P[\delta /\!/ \Sigma]$ и (по теореме I3.5) $\Sigma \in S^{U} \cup S^{T}$. Противоречие с выбором n. Попутно доказана:

Теорема I3.7

Если Σ - система записаная в вершине n из дерева сужений системы Σ^{0} и $\Sigma \in S^{T}$, то n - терминальная.

Обозначение

Пусть $\Sigma = (X, Y, Z) \in S_R$

Обозначим через

$\mathcal{L}[\Sigma]$ суммарную длину (в знаках) левых частей равенств, входящих в X и имеющих вид отличный от вида $\mathcal{T}' \dot{=} \mathcal{T}''$ где $\mathcal{T}'$ и $\mathcal{T}''$ - жесткие термы.

$l(\Sigma)$ - суммарную длину (в знаках) левых частей равенств входящих в X. [redacted].

$n_{=}(\Sigma)$ - число равенств вида $\mathcal{T}'=\mathcal{T}''$, входящих в X где $\mathcal{T}', \mathcal{T}''$ - жесткие термы

$n_{\neq}(\Sigma)$ - число неравенств в Y

$n_e(\Sigma)$ - число e - переменных, входящих в X и Y /разные вхождения одной и той же переменной считаются один раз/.

Определение I3.6

Сложностью системы $\Sigma \in S_R$ назовем упорядоченную пятёрку ~~четверку~~ чисел: $C(\Sigma)=(\ell(\Sigma), \mathcal{L}(\Sigma), n_{=}(\Sigma), n_{\neq}(\Sigma), n_e(\Sigma))$.

Обозначим через $\mathbb{N}^n$ множество всех упорядоченных n - ок натуральных чисел. Введем на множестве $\mathbb{N}^n$ лексикографический порядок обычным образом:

Пусть $a=(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$

$b=(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{N}^n$

Будем говорить, что a строго меньше b и писать $a<b$, если существует $i \in [1, n]$, такое, что

(I) $a_k=b_k$ для всех $k \in [1, i)$ и

(2) $a_i < b_i$

Теорема А

Для любого натурального n в множестве $\mathbb{N}^n$ не существует бесконечной, строго убывающей последовательности.

Доказательство

Утверждение теоремы докажем используя индукцию по n

База индукции

При $n=1$ утверждение теоремы выполняется.

Шаг индукции

Пусть при $n=k$ утверждение теоремы выполнено. Докажем, что оно выполненео и при $n=k+1$.

От противного

Пусть существует в $\mathbb{N}^{k+1}$ строго убывающая бесконечная последовательность:

$$a^{(1)} > a^{(2)} > \ldots > a^{(m)} > \ldots ; \qquad a^{(m)} = (a_1^{(m)}, \ldots, a_{k+1}^{(m)}) \in \mathbb{N}^{k+1}$$

Рассмотрим последовательность натуральных чисел $\{a_1^{(m)}\}$. Т.к. $a^{(m)} > a^{(m+1)}$, то последовательность $\{a_1^{(m)}\}$ не возрастающая (см.определение I3.6). В этой последовательности с некоторого номера n_0 все члены равны $a_1^{(n_0)} = a_1^{(n_0+p)}$ (в противном случае из нее можно было бы выделить строго-убывающую последовательность натуральных чисел).

Рассмотрим последовательность

$$b^{(p)} = (a_2^{(n_0+p)}, \ldots, a_{k+1}^{(n_0+p)}) \in \mathbb{N}^k \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

Т.к. $a^{(n_0+p)} > a^{(n_0+p+1)}$ и $a_1^{(n_0+p)} = a_1^{(n_0+p+1)}$, то $b^{(p)} > b^{(p+1)}$ т.е. построена бесконечная строго убывающая последовательность в $\mathbb{N}^k$. Противоречие с предположением индукции.

Теорема I3.8

Если $\Sigma \in S_k$, то

(I) $c(P_\psi[\Sigma]) \leq c(\Sigma)$

(2) $c(P_\psi \circ P_\alpha[\Sigma]) \leq c(\Sigma)$

(3) $c(P_1[\Sigma]) \leq c(\Sigma)$

(4) $c(P[\Sigma]) \leq c(\Sigma)$

Доказательство

(3) следует из определений I3.6 и 9.5.

(2) следует из определений I3.6 и 9.7.

/см.также доказательство ~~леммы~~ 2 /

(I) следует из определений I3.6 и 9.3.

(4) следует из определения P и пунктов (I) $\div$ (3)

Определение I3.7

Сужение δ назовем упрощающим для системы Σ, если $C(P \circ \delta // [\Sigma]) < C(\Sigma)$.

Сужение δ назовем последним для системы Σ, если $P \circ \delta // [\Sigma] \in \mathcal{S}^T$

Теорема I3.9

Если $\Sigma = (X, Y, Z) \in \mathcal{S}^U$ и $P = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\} = \gamma[\Sigma]$ то для любого $i = 1, \ldots, n$ или δ_i - последняя для Σ, или δ_i ~~упрощенная~~ упрощающая для Σ.

Доказательство

Система Σ требует расщепления P т.е. существует отношение $\mathcal{E}' \overset{=}{\neq} \mathcal{E}''$ (равенство или неравенство) из $X \cup Y$ которое требует P. Пусть $\Sigma_i = P \circ \delta_i // [\Sigma]$.

Доказательство данной теоремы получается из рассмотрения всех случаев для этого отношения и расщепления P (см. определение I3.2) и опирается на следующие шесть утверждения, в справедливости которых не трудно убедиться непосредственной проверкой.

(I) Если $\mathcal{E}' \overset{=}{\neq} \mathcal{E}''$ и P имеют вид соответсвующий пунктам (1)÷(5) определения I3.2, то δ_2 - последнее для Σ и $\ell(\Sigma_1) \le \ell(\Sigma)$; $\mathcal{Z}(\Sigma_1) \leq \mathcal{Z}(\Sigma)$; $n_=(\Sigma_1) < n_=(\Sigma)$.

(2) Если $\mathcal{E}' \overset{=}{\neq} \mathcal{E}''$ и P имеют вид соответсвующий пункту (6) определения I3.2, то δ_2 - последнее для Σ и $\ell(\Sigma_1) < \ell(\Sigma)$; $\mathcal{Z}(\Sigma_1) \leq \mathcal{Z}(\Sigma)$.

(3) Если $\mathcal{E}' \overset{=}{\neq} \mathcal{E}''$ и P имеют вид соответсвующий пунктам (7), (8), (IO) определения I3.2, то $\ell(\Sigma_1) \le \ell(\Sigma)$; $\mathcal{Z}(\Sigma_1) \leq \mathcal{Z}(\Sigma)$; $n_=(\Sigma_1) \leq n_=(\Sigma)$; $n_{\neq}(\Sigma_1) \leq n_{\neq}(\Sigma)$; $n_e(\Sigma_1) < n_e(\Sigma)$; и $\mathcal{Z}(\Sigma_2) < \mathcal{Z}(\Sigma)$

(4) Если $\mathcal{E}' \overset{=}{\neq} \mathcal{E}''$ и P имеют вид соответствующий пунк-

там (9), (II) определения I3.2, то $\mathcal{Z}(\Sigma_1) < \mathcal{Z}(\Sigma)$. $\ell(\Sigma_1) \leq \ell(\Sigma)$

(5) Если $\mathcal{E}' \overset{=}{\neq} \mathcal{E}''$ и P имеют вид соответствующий пункту (I2) определения I3.2, то δ_2 - последнее для Σ и $\ell(\Sigma_1) \leq \ell(\Sigma)$; $\mathcal{Z}(\Sigma_1) \leq \mathcal{Z}(\Sigma)$; $n_=(\Sigma) \leq n_=(\Sigma)$; $n_{\neq}(\Sigma_1) \leq n_=(\Sigma)$; $n_e(\Sigma_1) < n_e(\Sigma)$.

(6) Если $\mathcal{E}' \underset{=}{\neq} \mathcal{E}''$ и P имеют вид соответствующий пунктам (I3)÷(I6) определения I3.2, то δ_1 - последнее для Σ и $\ell(\Sigma_2) = \ell(\Sigma)$; $\mathcal{Z}(\Sigma_2) = \mathcal{Z}(\Sigma)$; $n_=(\Sigma_2) = n_=(\Sigma)$; $n_{\neq}(\Sigma_2) < n_{\neq}(\Sigma)$.

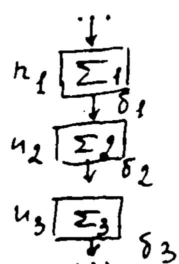
Теорема I3.I0

Дерево сужений Σ^0 не может быть бесконечным.

Доказательство

От противного. Пусть имеется бесконечное дерево сужений Σ^0 (см. определения I3.5) каждая вершина имеет конечное (может быть пустое) множество дочерних вершин. Поэтому в бесконечном дереве сужений Σ^0 должен быть бесконечный путь (теорема Кёнига [2, стр.472]): $n_1, n_2, n_3, \ldots$.

Пусть в вершине n_i записана система Σ, а ребру ведущему от n_i к n_{i+1} приписано сужение δ_i $(i = 1, 2, 3 \ldots)$. /см. рис. 2/



(рис. 2)

Из теорем I3.6, I3.7, I3.9 и определения I3.5 следует, что $\Sigma_i \in S^U$, $\Sigma_{i+1} = P[\delta_i // \Sigma]$, $\Sigma_i \notin S^T$, $\delta_i \in \gamma[\Sigma_i]$

Никакая δ_i не может быть последней для Σ_i, т.к. $\Sigma_{i+1} \notin S^T$ поэтому (теорема I3.9)

δ_i - упрощающая для Σ_i т.е. $C(\Sigma_i) > C(\Sigma_{i+1})$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$

т.е. существует бесконечная, строгоубывающая последовательность упорядоченных ~~четверок~~ пятёрок. Противоречие (см. теорему A).

14. Нагруженное дерево.

Определение 14.1

Дерево сужений системы Σ° назовем завершенным, если в любой его терминальной вершине записана терминальная система.

Терминальную вершину завершенного дерева сужений Σ° будем называть ϕ - вершиной, если в ней записана ϕ - терминальная система, в столбике, как 2 нижние строки

T - вершиной, если в ней записана T - терминальная система,

F - вершиной, если в ней записана F - терминальная система

Далее везде через $(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e)$ и $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$ будут обозначаться классы обладающие следующими свойствами $\{\mathcal{E}_t \in \mathcal{E}_e\}, \mathcal{E}_t \in \mathcal{E}_t, \mathcal{N}_e, \mathcal{N}_t \in \mathcal{N}$ и любая переменная из $\mathcal{N}_e$ входит в $\mathcal{E}_e$.

Определение 14.2

Деревом системы Σ°, нагруженным классом $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$ назовем дерево, которое удовлетворяет следующим условиям:

(1) Оно является завершенным деревом сужений системы Σ° каждой вершине которого приписан класс, причем:

(2) Корневой вершине приписан класс $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$ и

(3) Если вершине n приписан класс $(\mathcal{E}', \mathcal{N}')$ вершина n' является дочерней для вершины n и к ребру ведущему от n к n' приписано сужение δ, то вершине n' приписан класс:

$$\delta /\!/ (\mathcal{E}', \mathcal{N}')$$

Класс будем называть:

ϕ - классом, если он приписан ϕ - вершине,

T - классом, если он приписан T - вершине

F - классом, если он приписан F - вершине.

Определение I4.3

Пуcть $(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e)$ и $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$ - классы $\mathcal{E}_e \in \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_t \in \mathcal{E}_t, \mathcal{N}_e, \mathcal{N}_t \in n$ любая переменная из $\mathcal{N}_e$ входит в $\mathcal{E}_e$. Назовем деревом системы $(\{\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_t\}, \mathcal{N}_e, \mathcal{N}_t)$ нагруженное классом $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$ решающим деревом для пары классов $(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e)$ и $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$ и ~~обозним~~ обозначим через $\mathcal{D}[(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e), (\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)]$

Теорема I4.I

Пусть h - вершина из $\mathcal{D}[(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e), (\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)]$, h' - ее дочерняя вершина, Σ - система записанная в h, Σ' - система записанная в h, $(\mathcal{E}, \mathcal{N})$ - класс приписанный вершине h, $(\mathcal{E}', \mathcal{N}')$ класс приписанный вершине h'. Тогда любая s-, t-, e-, v - переменная, входящая в Σ, входит в $(\mathcal{E}, \mathcal{N})$ то любая s-, t-, e-, v -переменная из Σ' входит в $(\mathcal{E}', \mathcal{N}')$.

Доказательство

Следует из определений 8.1, 12.1, I4.3 и определения Y.

Следствие I4.I

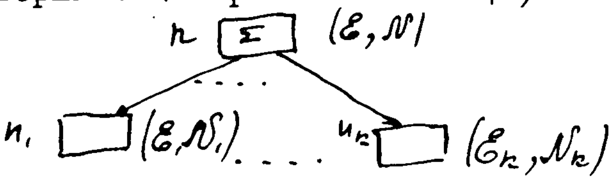
Пусть h - вершина дерева $\mathcal{D}[(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e), (\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)]$. $(\mathcal{E}, \mathcal{N})$ - класс приписанный h, Σ - система записанная в h. Тогда любая s-, t-, e-, v - переменная, входящая в Σ, входит в $(\mathcal{E}, \mathcal{N})$

Доказательство

Т.К. - это утверждение верно для корневой вершины (см.определение I4.3), то оно верно и для всех вершин (по теореме I4.I).

Следствие I4.2

Пусть h - вершина дерева $\mathcal{D}[(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e), (\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)]$, $\{h_1, \dots h_k\}$ множество ее дочерних вершин, в вершине h записана система Σ, вершине n_i приписаны класс $(\mathcal{E}_i, \mathcal{N}_i)(i=1,\dots,k)$, вершине h приписан класс $(\mathcal{E}, \mathcal{N})$ /см. рис. 3/



(рис 3)

Тогда множество $M=\{(\mathcal{E}_1, \mathcal{N}_1), \dots, (\mathcal{E}_k \mathcal{N}_k)\}$ является непосредственным расщеплением класса $(\mathcal{E}, \mathcal{N})$ порожденным расщеплением $\gamma[\Sigma]$

Доказательство

Следует из следствия I4.I и определений 11.2, I4.2, I4.3 и определения отображения $\gamma[\Sigma]$.

Следствие I4.3

Объединение всех классов, приписанных терминальным вершинам решающего дерева для пары классов $(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e)$ и $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$ совпадает с классом $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$

Доказательство

Следует из следствия I4.2 и теоремы 11.1.

Теорема I4.2

Для любого класса приписанного терминальной вершине из $\mathcal{D}[(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e), (\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)]$, выполняется одна и только одна из следующих трех возможностей:

(I) он является ϕ - классом,

(2) он является F - классом

(3) он является T - классом

Доказательство

Следует из теоремы 12.2 и определения I4,I, I4.2, I4.3.

Нам потребуются следующие обозначения:

K_T - множество всех T - классов дерева $\mathcal{D}[(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e), (\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)]$

K_F - множество всех F классов дерева $\mathcal{D}[(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e), (\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)]$

K_ϕ - множество всех ϕ - классов дерева $\mathcal{D}[(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e)(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)]$.
Из теоремы I3.I0 следует,что эти множества конечны.

Теорема I4.3

Пусть h - вершина из $\mathcal{D}[(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e),(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)]$, h' - дочерняя вершина вершины h ,$(\mathcal{E}, \mathcal{N})$ - класс приписанный h , Σ система записанная в h ,$(\mathcal{E}' \mathcal{N}')$ - класс приписанный h' , $\Sigma = (X, Y, Z), \Sigma' = (X', Y' Z')$ тогда если $Z = \Psi[\mathcal{N}]$, то $Z' = \Psi[\mathcal{N}']$

Доказательство

Следует из определений 8.1 и определения 12.1

Следствие I4.4

Если h - вершина из $\mathcal{D}[(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e)(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)]$ $\Sigma = (X, Y, Z)$ - система записанная в h , $(\mathcal{E}, \mathcal{N})$ класс приписанный h , то $Z = \Psi[\mathcal{N}]$

Доказательство

Т.к. утверждение следствии верно для терминальной вершины (см. определения I4.3) то оно верно и для любой вершины $\mathcal{D}[(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e)(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)]$ (см. теорему I4.3)

Следствии I4.5

Если класс $(\mathcal{E}, \mathcal{N}) \in K_\phi$, то $(\mathcal{E}, \mathcal{N}) = \phi$

Доказательство

Следует из определения 12.3 следствии I4.4 и теоремы 4.6

Следствие I4.6

Пусть $T = \bigcup\{(\mathcal{E}, \mathcal{N}) \mid (\mathcal{E}, \mathcal{N}) \in K_T\}; F = \bigcup\{(\mathcal{E}, \mathcal{N}) \mid (\mathcal{E}, \mathcal{N}) \in K_F\}$

Тогда $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t) = T \cup F$

Доказательство

Следует из следствий I4.5 и I4.3

В дальней шем будем обозначать $T = \bigcup\limits_{(\mathcal{E}, \mathcal{N}) \in K_T} (\mathcal{E}, \mathcal{N})$; $F = \bigcup\limits_{(\mathcal{E}, \mathcal{N}) \in K_F} (\mathcal{E}, \mathcal{N})$

Теорема I4.4

Если h - терминальная вершина из $\mathcal{D}[(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e),(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)]$, $(\mathcal{E},\mathcal{N})$ - класс приписанный h , то $(\mathcal{E},\mathcal{N})\leq(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)$

Доказательство

Пусть путь от корневой вершины,до вершины h проходит через вершины $h_0, h_1, \dots h_k$ (где h_0 корневая вершина, $h_k = h$), δ_i-сужение,записанное на ребре ведущем от h_i к h_{i+1}, $(\mathcal{E}_i,\mathcal{N}_i)$ класс приписанный вершине h_i (т.е. $(\mathcal{E}_0,\mathcal{N}_0)=(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)$; $(\mathcal{E}_k,\mathcal{N}_k)=(\mathcal{E},\mathcal{N})$). Т.к. для любого $i\in[0,k]$ вершина h_i имеет дочернюю вершину,то система записанная в h_i не содержит противоречий в безусловных отношениях (см. теорему I3.7), поэтому $\mathcal{J}[\mathcal{N}_i]=\phi,\ i=0,\dots k-1$ (из следствия I4.4). Поэтому (теоремы 5.3, 8.1) $(\mathcal{E},\mathcal{N})=\delta_0 /\!/ \circ \dots \circ \delta_k /\!/ (\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)\leq(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)$.

Следствие I4.7

Для любого класса $(\mathcal{E},\mathcal{N})\in k_T$ верно,что $(\mathcal{E},\mathcal{N})\leq(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)$

Для любого класса $(\mathcal{E},\mathcal{N})\in k_F$ верно,что $(\mathcal{E},\mathcal{N})\leq(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)$

Теорема I4.5

Для любого класса верно $(\mathcal{E},\mathcal{N})\in k_T$ верно,что $(\mathcal{E},\mathcal{N})\leq(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e)$

Теорема I4.6

Для любого класса $(\mathcal{E},\mathcal{N})\in k_F$ верно,что $(\mathcal{E},\mathcal{N})\cap(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e)=\phi$

Справедливость этих теорем следует из определений дерева $\mathcal{D}[(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e),(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)]$ и множеств k_F и k_T .

Следствие I4.8

$T=(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e)\cap(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)$ $\qquad F=(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)\setminus(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e)$.

Доказательство

Следует из теорем 6.1, I4.5, I4.6, I3.I0 и следствий I4.6, I4.7.

15. Обобщенный алгоритм отождествления

Обобщенный алгоритм отождествления по данным классам $(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e)$ и $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$ где $\mathcal{E}_e \in \varepsilon_e$, $\mathcal{E}_t \in \varepsilon_t$, $\mathcal{N}_e, \mathcal{N}_t \in \eta$ и любая переменная из $\mathcal{N}_e$ входит в $\mathcal{E}_e$, строит дерево $\mathcal{D}[(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e), (\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)]$

Построение этого дерева происходит в два этапа:

Сначала строиться завершенное дерево сужений системы $\Sigma^{\circ} = (\{\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_t\}, \mathcal{N}_e, \mathcal{N}_t)$ (шаги I.I ÷ I.5)

потом используя это дерево, строиться $\mathcal{D}[(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e), (\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)]$ (шаги 2.I ÷ 2.4)

U – список перекрытых вершин

Описание алгоритма

Шаг I.I (Начало построения дерева сужений Σ°)

Поместить в корневую вершину h_0 систему

$$\Sigma_1 = P[(\{\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_t\}, \mathcal{N}_e, \mathcal{N}_t)]$$

Если $\Sigma_1 \notin S^T$ то поместить h_0 в список U

Шаг I.2 Если список U пуст, то перейти к шагу 2.I

Шаг I.3 Выбрать вершину из списка U (Обозначим ее через h). Пусть в ней записана система Σ. Построить

$$P = \{\delta_1, \dots, \delta_k\} = \gamma[\Sigma]$$

Шаг I.4 Построить новые вершины $h_1, \dots, h_k$ и выполнив шаг I.5 для $i = 1, \dots, k$, перейти к шагу I.2.

Шаг I.5 Соединить h с h_i ребром, которому приписать δ_i. В вершину h_i записать $P[\delta_i // \Sigma]$. Если $P[\delta_i // \Sigma] \notin S^T$ то поместить ее в список U.

Шаг 2.I Приписать корневой вершине h_0 класс $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$. Если h_0 - не терминальная вершина. то поместить ее в список $\mathfrak{X}$.

Шаг 2.2 Если список $\mathfrak{X}$ пуст, то (построение $\mathcal{D}[(\mathcal{E}_e, \mathcal{N}_e), (\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)]$ закончено) надо остановиться.

Шаг 2.3 Выбрать вершину из $\mathfrak{X}$ (Пусть эта вершина h

и её дочерние вершины $n_1,\dots,n_k$.Вершине n пусть приписан класс $(\mathcal{E},\mathcal{N})$).

Для $i=1,\dots,k$ выполнить Шаг 2.4,после чего перейти на шаг 2.2.

Шаг 2.4 Вершине n_i приписать класс $\delta_i /\!/ (\mathcal{E},\mathcal{N})$ где δ_i -сужение приписанное ребру ведущему от n к n_i .Если n_i - не терминальная вершина,то поместить её в список $\mathcal{L}$.

Нетрудно убедиться,что алгоритм действительно строит дерево $\mathcal{D}[(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e),(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)]$.

Алгоритм для любой пары классов $(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e),(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)$ удовлетворяющей условиям перечисленным в начале этого пункта заканчивает построение $\mathcal{D}[(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e),(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)]$ за конечное число шагов (теорема I3.I0) и тем самым решает задачу о построении пересечения и разности этих классов (следствие 14.8).

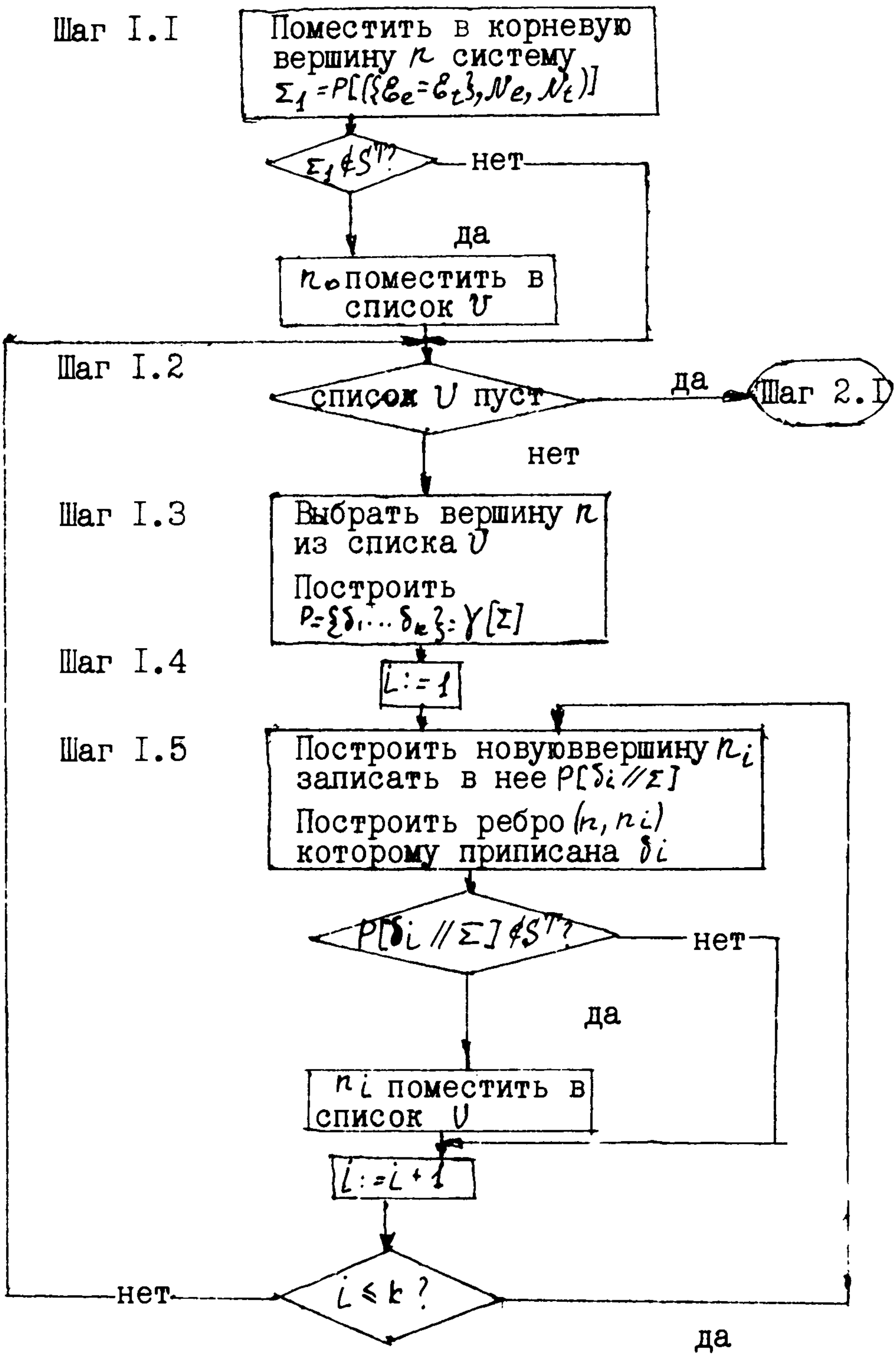
I6.Основные результаты

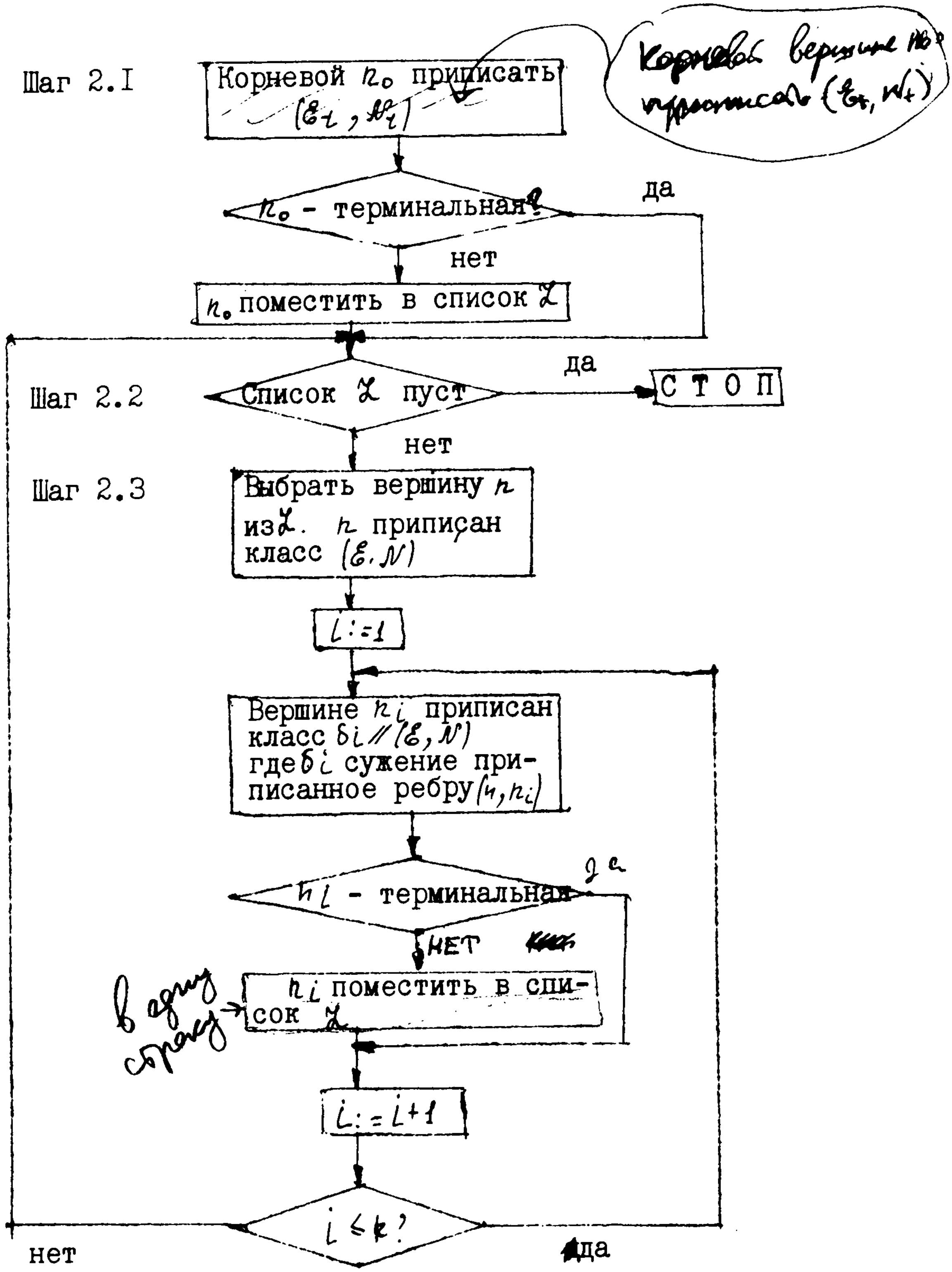
Построин и теоретически обоснован обобщенный алгоритм отождествления.

Т.к. все доказательства не опираются на конкретную реализацию отображений ρ и γ, то фактически проведено обоснование целого класса обобщенных алгоритмов.

Алгоритм построения $\mathcal{D}[(\mathcal{E}_e,\mathcal{N}_e),(\mathcal{E}_t,\mathcal{N}_t)]$ был запрограмирован на языке РЕФАЛ и на базе этого алгоритма был написан так называемый универсальный решающий алгоритм (УРА) /см. приложения/

Блок-схема обобщенного алгоритма отждествления:




Шаг 2.I
Корневой n_0 приписать $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$
Корневой вершине n_0 приписать $(\mathcal{E}_t, \mathcal{N}_t)$
n_0 - терминальная?
да
нет
n_0 поместить в список $\mathcal{L}$
Шаг 2.2
Список $\mathcal{L}$ пуст
да
СТОП
нет
Шаг 2.3
Выбрать вершину n из $\mathcal{L}$. n приписан класс $(\mathcal{E}, \mathcal{N})$
$i := 1$
Вершине n_i приписан класс $\delta_i /\!/ (\mathcal{E}, \mathcal{N})$ где δ_i сужение приписанное ребру (n, n_i)
n_i - терминальная
да
НЕТ
в одну строку
n_i поместить в список $\mathcal{L}$
$i := i+1$
$i \leq k$?
нет
да

По поводу реализации
обобщенного алгоритма отождествления.

(приложение к курсовой работе)

1981г

В курсовой работе описан и обоснован алгоритм обобщённого отождествления, без использования конкретной реализации отображений γ (<система>) → <систему> (генерация расщепления требуемой системы) и P(<система>) → <система> (приведение системы — т.е. выполнение разбора мягких, удаления тавтологий, выполнения присваиваний в системе). В конкретной реализации алгоритма, используя свободу выбора расщепления требуемой системы (γ) можно добиваться различных свойств получаемых решений. Здесь излагаются некоторые идеи реализации алгоритма, которые, как кажется, позволяют получать более компактные решающие деревья (везде далее — просто деревья) для построения пересечения и разности классов.

Идея 1 Выделение жёстких равенств из множества всех равенств.

Такое выделение кажется естественным, т.к. (1) — жёсткое равенство в процессе работы алгоритма всегда остаётся жёстким равенством

(2) — обработка мягкого равенства отличается от обработки жёсткого равенства.

Таким образом в реализации более удобно определить систему, как упорядоченную четверку

$$\Sigma = (МР, ЖР, УН, БН)$$

где МР, ЖР — конечные множества равенств (мягких и жёстких соответственно), УН и БН — конечные множества неравенств (условных и безусловных соответственно).

Идея 2. Приоритеты расщеплений. Признаки состояний отношений.

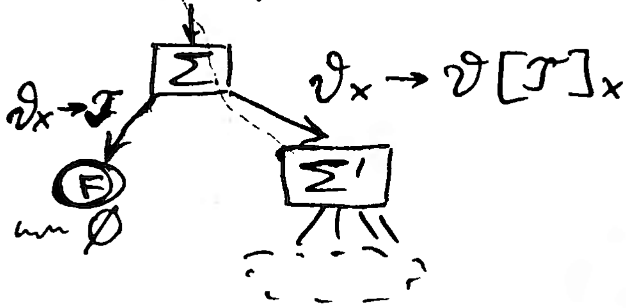
Из замечания 13.2 из курсовой работы (см. раздел 13 стр 46) видно, что генерировать расщепление требуемое системой $\Sigma = (МР, ЖР, УН, БН)$ (приведенной, нетерминальной, правильно специфицированной, т.е. из S^v-неприкрытой) можно по любому равенству из МР или ЖР, и по любому неравенству из УН, не содержащему $\bar{s}, \bar{t}$ — переменных. Такую "свободу выбора" имеет смысл использовать для управления "компактностью" строимого дерева. Поэтому постараемся приписать каждому отношению (точнее требуемому этим отношением расщеплению) некоторый приоритет, таким образом, чтобы эта система приоритетов направила бы эту "свободу выбора" в сторону достижения компактности дерева. Мы не будем описывать подробно интуитивные соображения приведшие к этой системе приоритетов, тем более не будем пытаться доказывать её эффективность. Поясним на примерах:

1. Рассмотрим любое неравенство из УН не содержащее $\bar{s}, \bar{t}, \bar{e}, \bar{v}$ — переменных, т.е.

имеющее вид:

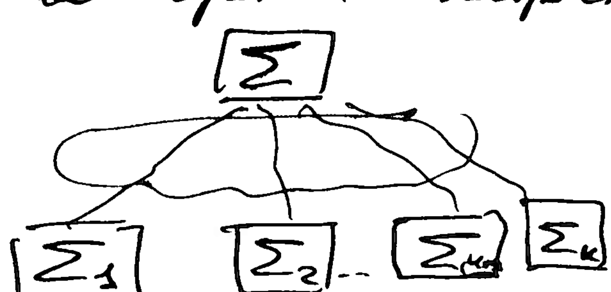
$$\vartheta_x \neq T \qquad (*)$$

где $\vartheta = s|t$, x-индекс, T - символ или s-переменная. Это неравенство требует расщепления $\{\vartheta_x \to T, \ \vartheta_x \to \vartheta[T]_x\}$. Применение первого сужения к системе, во время построения дерева сразу приводит нас к F-вершине. Т.е. если мы выполним это расщепление то соответствующий фрагмент дерева будет иметь вид:

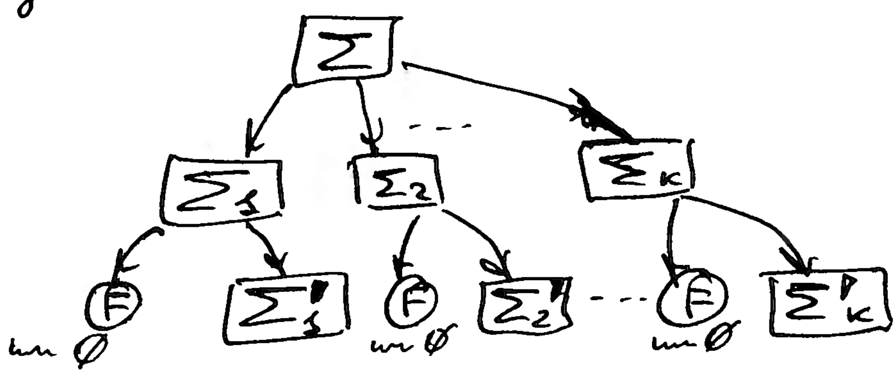


(1)

где Σ' получена из Σ "переносом" неравенства (*) из УН в БН. Генерация такого расщепления, очевидно, не приводит к сильному "раздуханию" дерева — появилось ветвление, но одна из веток в нём — тупиковая (длины 1). С другой стороны, если не выполнить это расщепление сейчас, как только оно требуется неравенством (*), то это, в большинстве случаев, приведёт к разрастанию дерева. Действительно в процессе преобразования системы во время построения дерева:



неравенство (*) будет сохраняться во всех дочерних системах (как правило). Оно конечно может исчезнуть обратившись в тавтологию или противоречие, но как показывает практика, ~~эти~~ случаи - редки. Поэтому (почти) во всех дочерних $\Sigma_1 \dots \Sigma_k$ будут существовать неравенства типа (*) ($(*)_1 \dots (*)_k$} — те в которые перейдёт наша (*)) и они (в конце-то концов наступит момент когда нам придётся ~~их~~ рассматривать) породят фрагменты дерева типа (1), но не в одном а в нескольких (как правило) местах.



Эти неформальные рассуждения поясняют, почему необходимо расщепление требуемое неравенством типа (*) генерировать в первую очередь, т.е. приписать ему высший приоритет — 1.

Подобные рассуждения были проведены для всех видов отношений требующих расщепления. "Последствия" генерации тех или других расщеплений сравнивались между собой. При этом анализировались, ~~...~~ {насколько} и какие параметры влияющие на сходимость алгоритма уменьшает то или иное расщепление (см. доказательство сходимости алгоритма в курсовой работе: стр 48-52} начиная с обозначения на стр 48), т.е. насколько одно расщепление "более упрощающее" чем другое (см. определение 13.7 и 13.9 стр 51)

Приведем полученную после этих рассуждений таблицу приоритетов (см. Опр 13.2 стр. 44–45)

Колонки в этой таблице:

(1) – номер (как в Определении 13.2 стр 44-45)
(2) – вид отношения
(3) – требуемое расщепление
(4) – приоритет (от 1 до 8)
(5) – возможные пояснения

Все обозначения, как в определении 13.2 стр 44-45

Условное неравенство:

1	2	3	4	5
(13)	$s_i \neq \sigma$	$\{(s_i \to \sigma), (s_i \to s[\sigma]_i)\}$	1	Эти случаи подробно рассмотрены выше.
(14)	$s_i \neq s_k$	$\{(s_i \to s_k), (s_i \to s[s_k]_i)\}$	1	
(15)	$t_i \neq s_k$	$\{(t_i \to s_k), (t_i \to t[s_k]_i)\}$	1	
(16)	$t_i \neq \sigma$	$\{(t_i \to \sigma), (t_i \to t[\sigma]_i)\}$	1	Жесткие равенства
(1)	$\sigma = s_i$ или $s_i = \sigma$	$\{(s_i \to \sigma), (s_i \to s[\sigma]_i)\}$	2	по первой ветке – исчезает переменная s_i, вторая ветка тупиковая длины 1 (F-вершина)
(2)	$\sigma = t_i$	$\{(t_i \to \sigma), (t_i \to t[\sigma]_i)\}$	2	Аналогично (1)
(3)	$s_k = t_i$	$\{(t_i \to s_k), (t_i \to t[s_k]_i)\}$	3	вторая ветвь терминальна длины 1 (F-вершина)
(4)	$s_k = s_i$	$\{(s_i \to s_k), (s_i \to s[s_i]_k)\}$	3	Аналогично 3
(5)	$\bar{s}_k = t_i$	$\{(t_i \to s_i), (t_i \to (e_i))\}$	3	Аналогично 3

Мягкие равенства

1	2	3	4	5
(6)	$(\mathcal{E}) = t_i$	$\left\{ \begin{matrix} (t_i \to s_i) \\ (t_i \to (e_i)) \end{matrix} \right\}$	4	Первая ветка тупиковая длины 1 (F-вершина)
(2)	$\square = e_{i_1} \ldots \ldots e_{i_n}$ $(n \geq 1)$	$\left\{ \begin{matrix} (e_{i_k} \to \square) \\ (e_{i_k} \to v_{i_k}) \end{matrix} \right\}$ $1 \leq k \leq n$	4	Вторая ветка тупиковая длины 1 (F-вершина)
(7)	$\overline{v}_x = e_{i_1} \ldots \ldots e_{i_n}$ $(n \geq 1)$	$\left\{ \begin{matrix} (e_{i_k} \to \square) \\ (e_{i_k} \to v_{i_k}) \end{matrix} \right\}$ $1 \leq k \leq n$	5	По первой ветке – исчезает e-переменная, по второй ветке – исчезает равенство типа(7) (породившее расщепление)
(9)	$\mathcal{T}' \mathcal{E}_1 = v_i \mathcal{E}_2$	$\{(v_i \to t_j e_i)\}$	6	Приоритет меньше чем 7, в случае
(11)	$\mathcal{E}_1 \mathcal{T}' = \mathcal{E}_2 v_i$	$\{(v_i \to e_i t_j)\}$	6	приоритета 7 – ветвление на 2 ветки.
(10)	$\overline{\mathcal{E}}_1 = e_i \mathcal{E}_2$	$\left\{ \begin{matrix} (e_i \to \square) \\ (e_i \to v_i) \end{matrix} \right\}$	7	
(12)	$\mathcal{E}_1 \mathcal{T}' = \mathcal{E}_2 e_i$	$\left\{ \begin{matrix} (e_i \to \square) \\ (e_i \to v_i) \end{matrix} \right\}$	7	
нет (99)	$\mathcal{E}_1 = k_i \mathcal{E}_2$ или $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 k_i$	$\{(k_i \to e_i)\}$	8	Менять неразмеченную переменную – последнее дело.

Используя эту таблицу, с каждым условном неравенством и с каждым терминальном равенством (т.е. с каждым жестким равенством и с каждым мягким, не разбирающимся на жесткие) в системе в которой выполнено приведение можно связать признак – приоритет требуемого им расщепления. (В случаях, когда отношение имеет вид $9 \div 12$ или 99 этот приоритет определяется неоднозначно. <u>Например</u>: выражение $A \overline{e}_1 B = v_2 + e_3$ имеет вид 9 и 12, т.е. требует расщепление приоритета 6 и 7. В этих случаях будем с отношением связывать минимальный приоритет требуемого им расщепления. К счастью отношение не может требовать расщеплений более чем с двумя разными приоритетами.)

Этот признак нужно будет переопределять только тогда, когда отношение действительно изменится (Например к нему применится подстановка, изменяющая его). Наличие такого признака позволит (1) не анализировать те отношения, для которых он установлен, (2) из всех возможных действий алгоритма быстро выбирать действие "оптимальное" в некотором смысле.

Такой признак связанный с отношением мы назовём признаком состояния отношения, и теперь доопределим его для тех отношений, которые не требуют расщепления, а значит которым нельзя приписать признак — приоритет

Условное неравенство:

признак	ситуация, когда приписывается такой признак
Q	для этого неравенства признак надо установить (например если неравенство изменилось из-за применения подстановки, то его старый признак сбрасывается в Q — сигнал о том, что надо данное неравенство анализировать). В начальной системе все признаки неопределённые — т.е. Q)
T	неравенство — тавтология
F	неравенство — противоречие
N	неравенство содержит $\bar{x}$ или $\bar{t}$ переменную со стороны алгоритма такое неравенство не требует никаких действий
1	неравенство требует расщепления приоритета 1

Жёсткие равенства

Q T F	Аналогично, как и в случае ~~Условных~~ Неравен[ств]
A	Отношение "требует" выполнения присваивания, т.е. имеет вид: $\bar{t}_i = T$ (присваивание $\{(t_i \leftarrow T)\}$) $\bar{s}_i = T'$ (присваивание $\{(s_i \rightarrow T')\}$) где T — жёсткий терм T' — символ или s переменное
2 или 3	Отношение требует расщепления ~~[illegible]~~ приоритета 2 или 3

Мягкие равенства

Q	Аналогично как в случае Условных неравенств. Дополнительно надо учесть, что разбирать не жёстким мягкое равенство надо <u>только</u> если его признак Q
T	— тавтология. <u>На практике этот признак можно не использовать</u> — мягкое равенство тавтологию можно удалять тут же, при обнаружении (это правда относится вообще к $\forall$ тавтологии).
F	— противоречие
A	— присваивание. Т.е. отношение имеет вид $\bar{e}_x = \mathcal{E}$ или $\bar{v}_x = \mathcal{E}'$ ($\mathcal{E}'$ содержит хотя бы один терм отличный от ek-переменной). <u>На практике этот признак можно не использовать</u>: действительно, присваивание порождённое таким равенством ($\{(\bar{e}_x \leftarrow \mathcal{E})\}$ или $\{(\bar{v}_x \leftarrow \mathcal{E}')\}$) неприменимо нигде, как только в левой части этого же равенства (L-выражение! $\Rightarrow$ $\bar{e}\,\bar{v}$-переменные <u>не повторные</u>!) но это присваивание превращает породившее

его равенство в тавтологично, а тавтологично можно сразу удалить. Это рассуждение поясняет, почему мягкое равенство "требующее присваивания" (т.е. имеющее вид $\overline{e}_x = \mathcal{E}$ или $\overline{v}_x = \mathcal{E}^{\circ}$) можно сразу удалять.

4÷8 равенство требует расщепления с некоторым приоритетом.

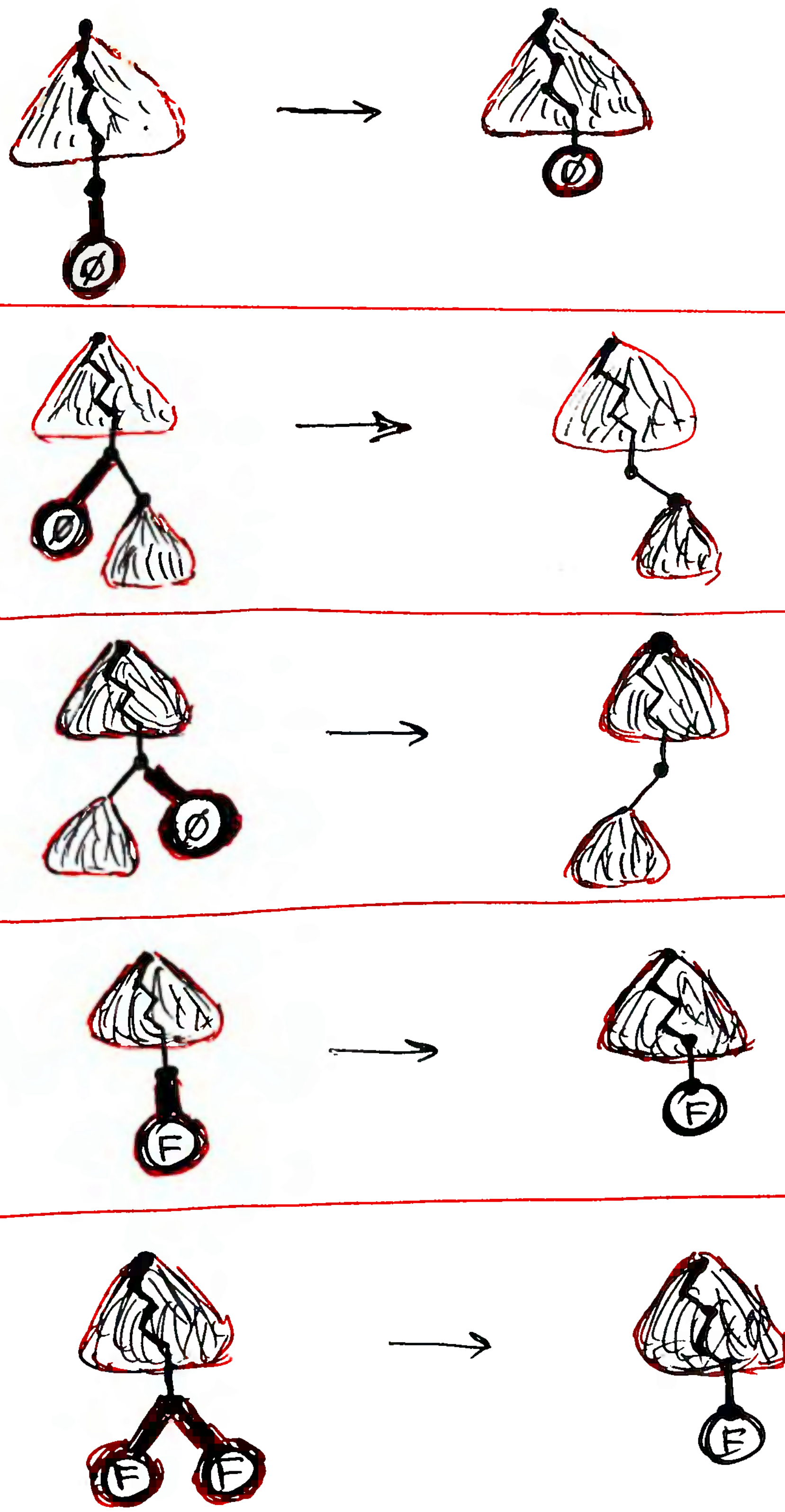
Замечу, что безусловное неравенство синтаксически "подпадают" под определение условных неравенств и в реализации алгоритма я применял к безусловным неравенствам ту же функцию определения признака состояния отношения что была написана для условных неравенств. Это было сделано для того, чтобы заново не определять понятия тавтологии и противоречия для безусловных неравенств. Что бы не было путаницы стоит отметить, что безусловное неравенство не требуют никогда никаких расщеплений и признак 1 (проставляемый "тупой" функцией определения признака состояния отношения) означает для безусловных неравенств только то, что данное неравенство не является ни тавтологией, ни противоречием.

Идея 3 Отбрасывание Ø-поддеревьев, подтягивание F-поддеревьев

Нетрудно видеть, что на свойство дерева представлять решение задачи об построении пересечения и разности двух классов не влияют следующие преобразования дерева:

Вид дерева

до и после преобразования



Эти правила применяются на практике к построенному дереву. Это ① позволяет уменьшить размеры дерева, ② избавиться от лишних дроблений. Например решая задачу для системы

$$\Sigma = \{ \underbrace{\{ \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3 = e_A e_A \}}_{МР}, \underbrace{\emptyset}_{ЖР}, \underbrace{\emptyset}_{УР}, \underbrace{\emptyset}_{БР} \}$$

мы получим громадное дерево, но все его терминальные вершины будут F-вершинами и при помощи преобразований оно "стянется" в одну точку:

F

Заметим, что решая задачу

$\Sigma = \{\{ \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3 = k_A k_A \}, \emptyset, \emptyset, \emptyset\}$ мы опять получим дерево: F — из которого следует, что <u>по существу</u> менять переменную k_A — не нужно. Т.е. <u>эти преобразования позволяют избавиться не только от лишних расщеплений обычных переменных, но ~~и~~ от лишних размен неразменных переменных.</u>

Правила можно обобщить заменив на чертежах фрагмент ∅ — на ∅-поддерево и фрагмент F на F-поддерево

где ∅-поддерево — поддерево все терминальные вершины которого — ∅-вершины, F-поддерево — поддерево в котором есть хотя бы одна F-вершина и все терминальные вершины являются ∅- или F-вершинами. Однако на практике анализ применимости правил проводится по направлению от терминальных вершин к корневой и поэтому достаточно и удобно необобщённое правило.

Кроме этого, на практике после подтягивания F-поддеревьев и отсечения Ø-поддеревьев, применяется ещё одно правило:

Таким образом вводится новый вид терминальной вершины — k-вершина. Это правило применяется до тех, пор пока внутри дерева не будет ~~~~ сужения вида $k_i \to e_i$ (т.е. вида размена). Тогда k-вершины покажут те места, в которых продолжать работу алгоритм никак не мог без размена k-переменных (вспомним что расщепление типа размен ~~~~ имеет у нас наинизший приоритет).

Идея 4 Мелкие идеи из реализации алгоритма (пересмотренная реализация без окрестностей — модуль DOPER), часто приводящие к крупному увеличению эффективности.

К сожалению вспомнить и перечислить все эти идеи очень трудно. Тут лучше всего посмотреть их в тексте самого модуля (однако надо учесть, что возможно, и скорее всего, он содержит ошибки).

Приведём две идеи которые очевидны:

(а) Присваивания $\bar{s}$-, $\bar{t}$-, $\bar{e}$-, $\bar{v}$- переменных

Присваивания $\bar{e}$-, $\bar{v}$- переменных никуда подставлять не надо (об этом говорилось выше)

Присваивание $\bar{t}$- переменной нужно подставлять только в левые части УН, т. к. в равенствах повторных $\bar{t}$- переменных нет (L - выражение).

Присваивания $\bar{s}$- переменной нужно подставлять только в левые части МР, ЖР, и в обоих частях УН.

(б) Расщепление приоритета 2 и 3 не меняет признаков у мягких равенств, даже если текст этих равенств немного и поменяется (конечно имеется в виду то сужение из расщепления, которое соответствует не тупиковой ветке).

К сожалению функции вычисления (расщепления) приоритета 6 и 7 написаны громоздко, что получилось из-за, как мне теперь кажется, лишней погони за эффективностью.

~~Идея 5 Перенос всех идей не блуждая алгоритма с анализом эффективности для модулей ФPERS, #KPZ, PERES весь 1980 г.~~

```
//STARTING EXEC EDRFC,M=NDOPR,P=
XXEDRFC  PROC M=,C=IRFCOMP0,P=NOSOURCE
XXREF    EXEC PGM=&C,PARM=&P,REGION=80K
IEF653I SUBSTITUTION JCL - PGM=IRFCOMP0,PARM=,REGION=80K
XXSTEPLIB  DD UNIT=2314,VOL=SER=LAMBDA,DISP=SHR,DSN=NEWREF.LINKLIB
XXSYSUT1 DD UNIT=2314,SPACE=(800,(200,200))
XXSYSPRINT DD SYSOUT=A,SPACE=(CYL,(2,1))
XXREFOUT DD UNIT=2314,SPACE=(800,(400,200)),DSN=&&WORK,DISP=(,PASS)
XXSYSIN DD UNIT=2314,VOL=SER=LAMBDA,DSN=SYMB(&M),DISP=SHR
IEF653I SUBSTITUTION JCL - UNIT=2314,VOL=SER=LAMBDA,DSN=SYMB(NDOPR),DISP=SHR

 DC-EC РЕФАЛ КОМПИЛЯТОР ВНИИСИ ВЕРСИЯ 2
    REFAL COMPILER
      DOPER       START
                  ENTRY DOPR
                  EXTRN NEWX
    * <СИСТЕМА> ::= (E1 (E2)(E3)) E4
    * E1 ::= <МР>.... - МЯГКИЕ РАВЕНСТВА
    * E2 ::= <ЖР>.... - ЖЕСТКИЕ РАВЕНСТВА
    * E3 ::= <УН>.... - УСЛОВНЕЕ НЕРАВЕНСТВА
    * E4 ::= <БН>.... - БЕЗУСЛОВНЫЕ НЕРАВЕНСТВА
    *
    *           ФОРМАТ                 : ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ SP
    * <МР> ::= ((<ПЧ>) <ЛЧ> SP)        :   Q,4,5,6,7,8
    * <ЖР> ::= (SV WX S1 W2 SP)        :   Q,T,F,A,2,3
    * <УН> ::= (SV WX S1 W2 SP)        :   Q,T,F,1,N
    * <БН> ::= (SV WX S1 W2 SP)        :   Q,T,F,1
    * SP - ПРИЗНАК СОСТОЯНИЯ ОТНОШЕНИЯ :
    * Q - НЕОПРЕДЕЛЕННОЕ       A - ПРИСВАИВАНИЕ
    * T - ТАВТОЛОГИЯ           F - ПРОТИВОРЕЧИЕ
    * N - БЕЗРАЗЛИЧНОЕ         1,2,...,8 - ПРИОРИТЕТ ТРЕБУЕМОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ
    *
    * K/NER/ SV WX S1 W2 -> SV WX S1 W2 SP
    * ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИЗНАКА НЕРАВЕНСТВА .
    * SV ::= 'Z' ! 'A' ! 'B' ! 'S' ! 'W' ! 'P'        S1 ::= 'Z' ! 'A' ! 'S'
    NER          SV WX SV WX = SV WX SV WX 'F'
                 'Z' WX 'Z' WY = 'Z' WX 'Z' WY 'T'
                 'Z' WX 'S' WY = 'S' WY 'Z' WX '1'
                 'S' WX 'Z' WY = 'S' WX 'Z' WY '1'
                 'S' WX 'S' WY = 'S' WX 'S' WY '1'
                 'W' WX 'Z' WY = 'W' WX 'Z' WY '1'
                 'W' WX 'S' WY = 'W' WX 'S' WY '1'
                 'P' EX = 'P' EX 'T'
                 EA =EA 'N'
    * K/ZHR/ SV WX S1 W2 -> SV WX S1 W2 SP
    * ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИЗНАКА ЖЕСТКОГО РАВЕНСТВА .
    * SV :: = Z ! A ! B ! S ! P      S1 ::=  Z ! S ! W ! P
    * НЕ МОГУТ БЫТЬ SV=P, A  S1=W ИЛИ S1=P
    ZHR          SV WX SV WX = SV WX SV WX 'T'
                'B' EX = 'B' EX 'A'
                 'P' EX = 'P' EX 'F'
                 EX 'P' WY = EX 'P' WY 'F'
                 'A' WX 'W' WY = 'A' WX 'W' WY '3'
                 'A' EX = 'A' EX 'A'
                 'Z' WX 'Z' WY = 'Z' WX 'Z'WY 'F'
                 'Z' WX SV WY = 'Z' WX SV WY '2'
    *   SV ::= 'S' !'W'
                 'S' WX 'Z' WY = 'S'WX 'Z' WY '2'
                 'S' WX EY = 'S' WX EY '3'
    *   EY = 'S' WY ! 'W' WY
    *
    * K/MR/ ((<ЛЧ>) <ПЧ>).... -> ER
    * РАЗБОР ПО ЖЕСТКИМ МЯГКИХ РАВЕНСТВ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРИЗНАКОВ
    * ER = F   - БЫЛИ ПРОТИВОРЕЧИЯ
    * ER = (<МР*>....) (<ЖР>....)
    *      ФОРМАТЫ АРГУМЕНТОВ РАБОЧИХ ФУНКЦИЯ :
    * K/MR1/ E0 '*' (E1) (E2) (E3) .
    * K/MR2/ E2 '*' (E1) (E3) .
    * E0 = <МР*>....   - НАДО РАЗБИРАТЬ И СЛЕВА, И СПРАВА
    * E1 = <МР>....    - ТЕРМИНАЛЬНЫЕ
    * E2 = <МР>....    - НАДО РАЗБИРАТЬ СПРАВА, ПРИЗНАК ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ
```

Обобщенный алгоритм отождествления (пересмотренная редукция без окрестностей)

← генерация нового индекса

193 предложений

	было	стало
MR		47
NER		9
ZHR		10

<МР*>, <ЖР*>, <УН*>, <БН*> то же самое но без SP

```
* E3 = <MF>....
MR          EA = K/MR1/ EA '*' () () () .
MR1         EØ (E3 (E4 'F')) = 'F'
            '*' (E1) (E2) (E3) = K/MR2/ E2 '*' (E1) (E3) .
            (()) EØ = K/MR1/ EØ .
            (() 'E' WY EX) EØ (E1) (E2) (E3) =                        1
                 K/MR1/ (() EX) EØ (E1 (() 'E' WY '4')) (E2) (E3) .
            (() 'K' WY EX) EØ (E1) (E2) (E3) =                        1
                 K/MR1/ (() EX) EØ (E1 (() 'K' WY '8')) (E2) (E3) .
            (() E1) EØ = 'F'
            (('C' WX) EY) EØ = K/MR1/ EØ .
            ((E1)) EØ = 'F'
            (('D' WX) EY) EØ = K/MR11/ (('D'WX)K/MR12/ () EY .) EØ .
            (('C' EX) EY) EØ (E1) (E2) (E3) =                         1
                 K/MR1/ EØ (E1) (E2 (('C' EX) EY '8')) (E3) .
            (('D' EX) EY) EØ (E1) (E2) (E3) =                         1
                 K/MR1/ EØ (E1) (E2 (('D' EX) EY '8')) (E3) .
            ((EX) 'E' EZ) EØ (E1) (E2) (E3) =                         1
                 K/MR1/ EØ (E1) (E2 ((EX) 'E' EZ '7')) (E3) .
            ((EX) 'V' EZ) EØ (E1) (E2) (E3) =                         1
                 K/MR1/ EØ (E1) (E2 ((EX) 'V' EZ '6')) (E3) .
            ((EX) 'K' EZ) EØ (E1) (E2) (E3) =                         1
                 K/MR1/ EØ (E1) (E2 ((EX) 'K' EZ '8')) (E3) .
            (('P' (EA) EB) 'W' WY EZ) EØ (E1) (E2)(E3) =              1
                 K/MR1/ ((EB) EZ) EØ (E1 (('P'(EA))'W' WY '4'))(E2)(E3).
            (('P' (EA) EB) 'P' (EX) EY) EØ (E1) (E2) (E3) =           1
                 K/MR1/ ((EA) EX) ((EB) EY) EØ (E1) (E2) (E3) .
            ((SV WX EA) SY WZ EB) EØ (E1) (E2) (E3) =                 1
                 K/MR1/ ((EA) EB) EØ (E1)(E2)(E3(K/ZHR/ SV WX SY WZ.)).
MR12        (EØ) 'E' WY E1 = K/MR12/ ('E' WY EØ) E1 .
            (EØ) 'K' WY E1 = K/MR12/ (EØ 'K' WY) E1 .
            (EØ) = EØ
            EX = /MR12/
MR11        (WX /MR12/) EØ = K/MR1/ EØ .
            (WX 'E' EY) EØ (E1)(E2)(E3) = K/MR1/ EØ (E1(WX 'E' EY '5'))   1
                 (E2) (E3) .
            (WX 'K' EY) EØ (E1)(E2)(E3) =                             1
                 K/MR1/ EØ (E1 (WX 'K' EY '8')) (E2) (E3) .
MR2         E2 (E1) (E3 (E4 'F')) = 'F'
            '*' (E1) (E3) = (E1) (K/VYKT/ E3 .)
            (() SP) EØ = K/MR2/ EØ .
            (()'E' WY EX SP) EØ (E1) (E3) =                           1
                 K/MR2/ (() EX SP) EØ (E1 (()'E' WY '4')) (E3) .
            (()'K' WY EX SP) EØ (E1) (E3) =                           1
                 K/MR2/ (() EX SP) EØ (E1 (()'K' WY '8')) (E3) .
            (() EX) EØ = 'F'
            (('C' WX) EY) EØ = K/MR2/ EØ .
            ((E1) SP) EØ = 'F'
            (('D' WX) EY SP) EØ = K/MR21/ (('D'WX) K/MR12/ () EY .) EØ .
            ((EA 'C' WX) EB) E2 (E1)(E3) = K/MR2/ E2 (E1 ((EA 'C' WX) EB))1
                 (E3) .
            ((EA 'D' WX) EB) E2 (E1) (E3) =                           1
                 K/MR2/ E2 (E1 ((EA 'D' WX) EB)) (E3) .
            ((EA) EB 'E' WX SP) E2 (E1) (E3) =                        1
                 K/MR2/ E2 (E1 ((EA) EB 'E' WX K/MP/ SP '7' .)) (E3) .
            ((EA) EB 'V' WX SP) E2 (E1) (E3) =                        1
                 K/MR2/ E2 (E1 ((EA) EB 'V' WX '6')) (E3) .
            ((EA) EB 'K' WX SP) E2 (E1) (E3) =                        1
                 K/MR2/ E2 (E1 ((EA) EB 'K' WX SP)) (E3) .
            ((EA 'P'(EB)) EX 'P'(EY) SP) E2 '*' (E1) (E3) =           1
                 K/MR1/ ((EB) EY)'*'(E1) (E2 ((EA) EX SP)) (E3) .
            ((EA  'P'(EB)) EX 'W' WY SP) E2 (E1) (E3) =               1
                 K/MR2/ ((EA) EX SP) E2 (E1 (('P'(EB)) 'W' WY '4')) (E3).
            ((EA SV WX) EB SY WZ SP) E2 (E1) (E3) =                   1
                K/MR2/ ((EA) EB SP) E2 (E1) (E3 (K/ZHR/ SV WX SY WZ.)).
MR21        (WX /MR12/) EØ = K/MR2/ EØ .
            (WX 'K' EY) E2 (E1) (E3) = K/MR2/ E2 (E1 (WX 'K' EY '8'))(E3).
            (WX 'E' EY) E2 (E1) (E3) = K/MR2/ E2 (E1 (WX 'E' EY '5'))(E3).
MP          '8' SP = SP
            S1  SP = S1
*
* K/VYKT/ <ОТНОШЕНИЕ>.... -> <ОТНОШЕНИЕ>....
```

```
* УДАЛЕНИЕ ТАВТОЛОГИИ .
VYKT      E1 (E2 'T') E3 = E1 K/VYKT/ E3 .
          E1 = E1
*
* K/TRAV/ () <ЖР>.... -> ER
* ER = F   - БЫЛИ ПРОТИВОРЕЧИЯ
* ER = <ЖР>....   - УДАЛЕНЫ ТАВТОЛОГИИ, РАССТАВЛЕНЫ ПРИЗНАКИ
          (E1 (E2 'T')) EØ = K/TRAV/ (E1) EØ .
TRAV      (E1 (E2 'F')) EØ = 'F'
          (E1) E2 (E3 'Q') E4 = K/TRAV/ (E1 E2 (K/ZHR/ E3.)) E4 .
          (E1) E2 = E1 E2
*
* K/TNER/ () <НЕР-ВО>.... -> ER
* ER = F   - БЫЛИ ПРОТИВОРЕЧИЯ
* ER = <НЕР-ВО>....   - УДАЛЕНЫ ТАВТОЛОГИИ, РАССТАВЛЕНЫ ПРИЗНАКИ
TNER      (E1 (E2 'F')) EØ = 'F'
          (E1 (E2 'T')) EØ = K/TNER/ (E1) EØ .     NER
          (E1) E2 (E3 'Q') E4 = K/TNER/ (E1 E2 (K/ZHR/ E3.)) E4 .
          (E1) E2 = E1 E2
*
* K/TMR/ () () <МР>.... -> ER
* ER = F   - БЫЛИ ПРОТИВОРЕЧИЯ
* ER = (<МР>....) (<ЖР>....)   - УДАЛЕНЫ ТАВТОЛОГИИ,
* РАССТАВЛЕНЫ ПРИЗНАКИ
TMR       (E1) (E2) E3 (E4 'Q') E5 = K/TMR1/ (E1 E3) (E2)K/MR/(E4). E5.
          (E1) (E2) E3 = (E1 E3) (E2)
TMR1      (E1) (E2) (E3) (E4) E5 = K/TMR/ (E1 E3) (E2 E4) E5 .
          (E1) (E2) 'F' E3 = 'F'
*
* K/PRIM/ (ED) EØ -> (ED)//EØ
PRIM      WD 'P'(E1) E2 = 'P'(K/PRIM/ WD E1 .) K/PRIM/ WD E2 .
          WD 'Z' WX EØ = 'Z' WX K/PRIM/ WD EØ .
          (E1 (SV WX EA) E2) SV WX EØ = EA K/PRIM/ (E1 (SV WX EA)E2) EØ.
          WD SV WX EØ = SV WX K/PRIM/ WD EØ .
          WD =
*
* K/PRIM1/ (SV WX EA) EØ -> ((SV WX EA))// EØ
PRIM1     (ED) 'P'(E1) E2 = 'P'( K/PRIM1/ (ED) E1 .) K/PRIM1/ (ED) E2 .
          (SV WX EA) SV WX EØ = EA K/PRIM1/ (SV WX EA) EØ .
          WD =
          WD SV WX EØ = SV WX K/PRIM1/ WD EØ .
*
* K/PRMS/ (SV WX EA) <МР>....
* K/PRMW/ (SV WX EA) <МР>....
* ВЫПОЛНЕНИЕ ЕДИНИЧНОЙ ПОДСТАНОВКИ В ОБЕИХ (PRMS) ИЛИ ТОЛЬКО В
* ПРАВЫХ ЧАСТЯХ (PRMW) МЯГКИХ РАВЕНСТВ БЕЗ ИЗМЕНЕНИЯ ИХ ПРИЗНАКОВ.
PRMS      WD ((EL) ER SP) EØ = ((K/PRIM1/ WD EL .) K/PRIM1/ WD ER . SP) 1
                K/PRMS/ WD EØ .
          WD =
PRMW      WD (WL ER SP) EØ = (WL K/PRIM1/ WD ER . SP) K/PRMW/ WD EØ .
          WD =
*
* K/ASSR/ (SA WB SC WD SP)....   ((SV WX EA)....).
* K/AS1R/ (SA WB SC WD SP)....   (SV WX EA).
* K/ASSL/ (SA WB SC WD SP)....   ((SV WX EA)....).
* K/AS1L/ (SA WB SC WD SP)....   (SV WX EA).
* ВЫПОЛНЕНИЕ ПОДСТАНОВКИ В ОДНУ ИЗ ЧАСТЕЙ ОТНОШЕНИЯ
* С РАССТАНОВКОЙ ПРИЗНАКОВ Q
ASSR      E1 (EL SV WX SP) E2 (E3 (SV WX EA) E4) =                      1
                E1 (EL EA 'Q') K/ASSR/ E2 (E3 (SV WX EA) E4) .
          E1 WD = E1
AS1R      E1 (EL SV WX SP) E2 (SV WX EA) =                              1
                E1 (EL EA 'Q') K/AS1R/ E2 (SV WX EA) .
          E1 WD = E1
ASSL      E1 (SV WX ER SP) E2 (E3 (SV WX EA) E4) =                      1
                E1 (EA ER 'Q') K/ASSL/ E2 (E3 (SV WX EA) E4) .
          E1 WD = E1
AS1L      E1 (SV WX ER SP) E2 (SV WX EA) =                              1
                E1 (EA ER 'Q') K/AS1L/ E2 (SV WX EA) .
          E1 WD = E1
*
* K/ASSS/ WD <МР>....
```

```
* ВЫПОЛНЕНИЕ ПОДСТАНОВКИ В ЛЕВЫХ ЧАСТЯХ РАВЕНСТВ
* БЕЗ ИЗМЕНЕНИЯ ПРИЗНАКОВ
ASSS      () E1 = E1
          WD ((EL) ER) E0 = ((K/PRIM/ WD EL .) ER) K/ASSS/ WD E0 .
          WD =
*
* K/PRP1/ (SV WX EA) SP E0 = ((SV WX EA))//E0 SN
* SN = SP   - ЕСЛИ ПОДСТАНОВКА НЕ ИЗМЕНИЛА E0
* SN = Q    - ИНАЧЕ
PRP1      WD SP 'P'(E1) E2 = K/PRP2/ WD (K/PRP1/ WD SP E1 .) E2 .
         (SV WX EA) SP SV WX E0 = EA K/PRP1/ (SV WX EA)'Q' E0 .
          WD SP SV WX E0 =  SV WX K/PRP1/ WD SP E0 .
          WD SP = SP
PRP2      WD (E1 SP) E2 = 'P'(E1) K/PRP1/ WD SP E2 .
*
* K/PRMRP/ (SV WX EA) <MP>....
* ВЫПОЛНЕНИЕ ПОДСТАНОВКИ В ПРАВЫХ ЧАСТЯХ РАВЕНСТВ С ИЗМЕНЕНИЕМ ПРИЗНАКА
PRMRP     WD (WL ER SP) E0 = (WL K/PRP1/ WD SP ER .) K/PRMRP/ WD E0 .
          WD =
* <ДЕРЕВО> ::=  T | F | 0 | <НЕСК. ВЕТОК>
*
* <НЕСК. ВЕТОК> ::= <ВЕТКА> | <ВЕТКА> <ВЕТКА>
* <ВЕТКА> ::= (<СУЖЕНИЕ> <ДЕРЕВО>)
* <СУЖЕНИЕ> ::= (SV WX EA) | #(SV WX EA)
                                                    ↑ неравенство
*
* K/DOPR/ (EL) (EN) (ET) (EX) -> <ДЕРЕВО>
* EL - L-ВЫРАЖЕНИЕ С ABCD-ПЕРЕМЕННЫМИ
* ET - ТИПОВОЕ ВЫРАЖЕНИЕ С SWEVK-ПЕРЕМЕННЫМИ
* EN - НЕРАВЕНСТВА С BA-ПЕРЕМЕННЫМИ
* EX - НЕРАВЕНСТВА С SW-ПЕРЕМЕННЫМИ
* ПОСТРОЕНИЕ ДЕРЕВА СУЖЕНИЯ
DOPR      (EL) (EN) (ET) (EX) = K/CLN/ K/MR/ ((EL) ET) .                         1
ENTRY            (K/CLN1/ EN .) K/CLN2/ EX . .
CLN1      (E1) E2 = (E1 'N') K/CLN1/ E2 .
          =
CLN2      (E1) E2 = (E1 '1') K/CLN2/ E2 .
          =
CLN       (E1) (E2) (E3) E4 = K/DOPR1/ (E1 (E2)(E3)) E4 .
          'F' E0 ='F'
*
* K/DOPR1/ <СИСТЕМА> - > <ДЕРЕВО>
* ЕСЛИ ЕСТЬ ПРИСВАИВАНИЯ, ТО НА  ASS, ИНАЧЕ НА  DOPR2
DOPR1     (E1 (E2 (E3 'A') E4) (E5)) E6 =                                        1
                K/ASS/ K/ASS1/ ((E3)) () E4 . (E1 (E2) (E5)) E6 .
          ES = K/DOPR2/ ES .
*
* K/ASS1/ (E1) (E2) E3-> (EA) (EB) (EC)  (ED)
* E1 = <WP*>....  - СОБРАННЫЕ ПРИСВАИВАНИЯ
* E2 = <WP>....   - НЕ ПРИСВАИВАНИЯ
* E3 = <WP>....   - НЕ ОБРАБОТАННЫЕ
* EA -   ПОДСТАНОВКА  В -ПЕРЕМЕННЫМ
* 5B -    ОДСТАНОВКА  А-ПЕРЕМЕННЫМ
* EC = <WP>....  - ЗДЕСЬ ПРИСВАИВАНИЯ ВЫПОЛНЕНЫ (ПРИЗНАК Q)
* ED = <WP>....  - ОСТАЛЬНЫЕ ЖЕСТКИЕ РАВЕНСТВА
* СБОР И ЧАСТИЧНОЕ ВЫПОЛНЕНИЕ ПРИСВАИВАНИЯ
ASS1      (E1) (E2) E3 (E4 'A') E5 = K/ASS1/ (E1 (E4)) (E2 E3) E5 .
          (E1) (E2) E3 = K/ASS2/ () () E1 . (E2 E3)
ASS2      (E1) (E2) E3 ('B' E4) E5 = K/ASS2/ (E1 E3) (E2 ('B' E4)) E5 .
          (E1) (E2) E3 = (E2) K/ASS3/ () (E1 E3) () .
ASS3      (E1) (E2 ('A' WX E3) E4 ('A' WX E5) E6) (E7) =                          1
                K/ASS3/ (E1 E2) (E4 ('A' WX E3) E6) (E7 (E3 E5 '1')) .
          (E1) (E2) (E3) = (E1 E2) (E3)
* K/ASS/ (EA) (EB) (EC) (ED) >СИСТЕМА< .
* ВЫПОЛНЕНИЕ ПРИСВАИВАНИЙ (СМ. ASS1)
*
ASS       (EB) (EA) (EC) (ED) (E1 (E2) (E3)) E4 = K/ASS4/ (K/ASSS/ (EA) 1
                E1 . (K/TRAV/ () K/ASSL/ E2 ED (EA) . EC .)                      2
                (K/TNER/ () K/ASSL/ K/ASSR/ E3 (EA) . (EA EB) . .)) E4 .
ASS4      (E1 ('F') W3) E4 = 'F'
          (E1 W2 ('F')) E4 = 'F'
          ES = K/DOPR2/ ES .
*
```

```
* K/DOPR2/ <СИСТЕМА> .   ВЫПОЛНЕНИЕ  РАСЩЕПЛЕНИЙ .
* В СИСТЕМЕ НЕТ ПРИСВАИВАНИЙ .
DOPR2    (E1 (E2)(E3 (EA '1') EB)) E4 = K/SPLT1/(EA)(E1(E2)(EB E3)) E4.
         (E1 (E2 (EA '2') EB) (E3)) E4 =                                      1
               K/SPLT2/ (K/SPL/ EA .) (E1 (E2 EB) (E3)) E4 .
         (E1 ((EA '3') E2) (E3)) E4 =                                         1
               K/SPLT3/ (K/SPL/ EA .) (E1 (E2) (E3)) E4 .
         (E1 (EA '4') EB () (E3)) E4 =                                        1
                K/SPLT4/ (EA) (E1 EB () (E3)) E4 .
         (E1 (EA '5') EB () (E3)) E4 = K/SPLT5/ (EA) (E1 EB ()(E3)) E4.
         (E1 (EA '6') EB () (E3)) E4 =                                        1
                K/SPLT6/ (EA) K/NEWX/ . (E1 (EA '6') EB () (E3)) E4 .
         (E1 (EA '7') EB () (E3)) E4 =                                        1
                K/SPLT7/ (EA) K/NEWX/ . (E1 (EA '7') EB () (E3)) E4 .
         (E1 (EA '8') EB () (E3)) E4 =                                        1
                K/SPLT8/ (EA) (E1 (EA '8') EB () (E3)) E4 .
         (()()) E4 = 'T'
SPL       'Z' WX EY = EY 'Z' WX
*  EY = 'S' WY ! 'W' WY
          EY 'W' WX = 'W' WX EY
*  EY = 'S' WY
          EA = EA
*
* K/SPLT1/ <YH*> <СИСТЕМА> .
* ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ ПО НЕРАВЕНСТВУ
SPLT1     (EA) (E1) E4 = K/VETKA/ ((EA) K/FØ/ K/TNER/ () K/AS1R/ K/AS1L/1
                E4 (EA). (EA)...) ('#'(EA) K/DOPR2/ (E1) E4 (EA'1'). ).
FØ        'F' = 'Ø'
          EA = 'F'
*
* K/SPLT2/ (SV WX 'Z' WY) <СИСТЕМА> .    SV = S ] W
* ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ ТИПА 2 .(ИСПОЛЬЗУЕТСЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЩЕРЛЕ-
* НИЙ ТИПА 3, ТОГДА ВМЕСТО 'Z' WY  СТОИТ 'S' WY )
SPLT2     ('S' EX) (E1 (E2) (E3)) E4 = K/VETKA/                               1
                (('S' EX) K/SPL21/ (K/PRMS/ ('S' EX) E1 .                     2
                    (K/TRAV/() K/AS1R/K/AS1L/ E2 ('S' EX). ('S' EX)..)        3
                    (K/TNER/() K/AS1R/K/AS1L/ E3 ('S' EX). ('S' EX)..))4
                     K/TNER/() K/AS1R/K/AS1L/ E4 ('S' EX). ('S' EX)...)5
                ('#'('S' EX) 'F') .
          ('W' WX EY) (E1 (('P' WA) 'W' WX '4') EB W2 W3) E4 = 'F'
          ('W' EX) (E1 (E2) (E3)) E4 = K/VETKA/                               1
                (('W' EX) K/SPL21/ (K/PRMW/ ('W' EX) E1 .                     2
                    (K/TRAV/ () K/AS1R/ E2 ('W' EX) . .)                      3
                    (K/TNER/ () K/AS1L/ E3 ('W' EX) . .))                     4
                     K/TNER/ () K/AS1L/ E4 ('W' EX) . . .)                    5
                ('#'('W' EX) 'F') .
* РАСЩЕПЛЕНИЕ ТИПА 2 НЕ МЕНЯЕТ ПРИЗНАКОВ МЯГКИХ РАВЕНСТВ
SPL21     (E1) 'F' = 'Ø'
          (E1 ('F')) E4 = 'F'
          (E1 ('F') (E3)) E4 = 'F'
          ES = K/DOPR1/ ES .
*
* K/SPLT3/ (EA) <СИСТЕМА> .
* EA = 'A' WX 'W'WY ! 'W' WX 'S' WY ! 'S' WX 'S' WY
* ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ ТИПА 3 . (СМ. ТАКЖЕ SPLT2)
SPLT3     ('A' WX'W' WY) (E1 (('P' WA)'W' WX '4') EB W2 W3) E4 = 'F'
          ('A' WX 'W' WY) (E1 (E2) (E3)) E4 = K/VETKA/                        1
                (('W' WY 'S' WY)  K/DOPR1/ (K/PRMW/ ('W' WY 'S' WY) E1 .2
                    (K/TRAV/(('A'WX'S'WY'A'))K/AS1R/ E2 ('W'WY'S'WY)..)3
                    (K/TNER/ () K/AS1L/ E3 ('W'WY 'S'WY) . . ) )              4
                     K/TNER/ () K/AS1L/ E4 ('W'WY 'S'WY) . . .)               5
                (('W' WY 'P'('E' WY)) 'F') .
* В ПЕРВОЙ ВЕТКЕ ПРОТИВОРЕЧИЯ НЕ ВОЗНИКАЮТ. ПРИЗНАКИ У МР НЕ МЕНЯЮТСЯ
          EX = K/SPLT2/ EX .
*
* K/SPLT4/ (EA) <СИСТЕМА> .
* EA = () 'E' EX ! ( 'P'(EL) ) 'W' EX
* ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ ТИПА 4
SPLT4     (()'E' WX) (E1 ()(E3)) E4 = K/VETKA/                                1
             (('E' WX) K/SPL41/(K/TMR/ () () K/PRMRP/ ('E' WX) E1 . .         2
                    () (E3)) E4 .)                                            3
             (('E' WX 'V' WX) 'F') .
```

```
         (('P'(EL)) 'E' WX) (E1 ()(E3)) E4 = K/VETKA/                    1
            (('W'WX 'S'WX) 'F')                                          2
            (('W'WX 'P'('E'WX)) K/SPL41/ (K/PR1/ WX (((EL)'E' WX 'Q'))   3
               () E1 . (K/PR2/ WX E3 .)) K/PR2/ WX E3 .. ).
PR1      WX (E1) (E2) E3 (('P'(E4))'W' WX SP) E4 =                       1
               K/PR1/ WX (E1 ((E4)'E' WX 'Q')) (E2 E3) E4 .
         WX (E1)(E2) E3 = K/TMR/ () () E1 .                              1
            K/PRMW/ ('W' WX 'P'('E' WX)) E2 E3 .
PR2      WX E1('W' WX ER) E2 = E1 K/PR2/ WX E2 .
         WX E1 = E1
SPL41    ('F' E1) E4 = 'F'
         ((ES) (EH) E1 () (E3)) E4 = K/DOPR1/ (E1 ES (EH) (E3)) E4 .
*
* K/SPLT5/ (('D' WY) 'E' WX E0) <СИСТЕМА> .
* ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ ТИПА 5 .
SPLT5    (WD 'E' WX E0) (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/                       1
           (('E' WX) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/ ('E' WX)            1
                 (WD E0 'Q') E1 .. () (E3)) E4 , )                       3
           (('E'WX 'V'WX) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/                4
                 ('E'WX 'V'WX) E1 .. () (E3)) E4 .) .
*
* K/SPLT6/ ((EL) ER) WJ <СИСТЕМА> .
* ((EL) ER) = ((SH WY ER) 'V' WX ER) ! ((EL SH WY) ER 'V' WX)
* SH =  B ! A ! Z ! S ! P      WJ - НОВЫЙ ИНДЕКС
* ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ ТИПА 6
SPLT6    (('B' EL) 'V' WX ER) WJ (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/              1
           (('V'WX  'W'WJ 'E'WX) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/        2
              ('V'WX 'W'WJ 'E'WX) E1 . . () (E3)) E4 .).
         ((EL 'B'WY) ER 'V'WX) WJ (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/             1
           (('V'WX  'E'WX 'W'WJ) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/        2
              ('V'WX  'E'WX 'W'WJ) E1 . . () (E3)) E4 .) .
         (('A' EL) 'V' WX ER) WJ (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/              1
           (('V'WX  'W'WJ 'E'WX) K/VETKA/                                2
              (('W'WJ 'S'WJ) K/SPL41/(K/TMR/ () () K/PRMRP/              3
                 ('V'WX  'S'WJ 'E'WX) E1 . . () (E3)) E4 .)              4
              (('W'WJ  'P'('E'WJ)) 'F' ) . ) .
         ((EL 'A'WY) ER 'V'WX) WJ (E1 ()(E3)) E4 = K/VETKA/              1
           (('V'WX  'E'WX 'W'WJ) K/VETKA/                                2
              (('W'WJ 'S'WJ) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/             3
                 ('V'WX  'E'WX 'S'WJ) E1 . . () (E3)) E4 .)              4
              (('W'WJ 'P'('E'WJ)) 'F' ) . ) .
         (('Z' WY EL) 'V'WX ER) WJ (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/            1
           (('V'WX 'W'WJ 'E'WX) K/VETKA/                                 2
              (('W'WJ 'Z'WY) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/             3
                 ('V'WX  'Z'WY 'E'WX) E1 ..  () (E3)) E4.)               4
              ('#'('W'WJ 'Z'WY) 'F' ). ).
         ((EL 'Z'WY) ER 'V'WX) WJ (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/             1
           (('V'WX  'E'WX 'W'WJ) K/VETKA/                                2
              (('W'WJ 'Z'WY) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/             3
                 ('V'WX  'E'WX 'Z'WY) E1 .. () (E3)) E4 .)               4
              ('#'('W'WJ 'Z'WY) 'F'). ).
         (('S'WY EL) 'V'WX ER) WJ (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/             1
           (('V'WX 'W'WJ 'E'WX) K/VETKA/                                 2
              (('W'WJ 'S'WY) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/             3
                 ('V'WX 'S'WY 'E'WX) E1 .. () (E3)) E4 .)                4
              ('#'('W'WJ 'S'WY) 'F') .) .
         ((EL 'S'WY) ER 'V'WX) WJ (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/             1
           (('V'WX 'E'WX 'W'WJ) K/VETKA/                                 2
              (('W'WJ 'S'WY) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/             3
                 ('V'WX 'E'WX 'S'WY) E1 .. () (E3)) E4 .)                4
              ('#'('W'WJ 'S'WY) 'F') .) .
         (('P' EL) 'V'WX ER) WJ (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/               1
           (('V'WX 'W'WJ 'E'WX) K/VETKA/                                 2
              (('W'WJ 'S'WJ) 'F')                                        3
              (('W'WJ 'P'('E'WJ)) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/        4
                 ('V'WX 'P'('E'WJ) 'E'WX) E1 .. () (E3)) E4 .).).
         ((EL 'P'WY) ER 'W'WX) WJ (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/             1
           (('V'WX 'E'WX 'W'WJ) K/VETKA/                                 2
              (('W'WJ 'S'WJ) 'F')                                        3
              (('W'WJ 'P'('E'WJ)) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/        4
                 ('V'WX 'E'WX 'P'('E'WJ)) E1 .. () (E3)) E4 .).).
```

```
* K/SPLT7/ ((EL) ER) WJ <СИСТЕМА> .
* ((EL) ER) = ((SH WY ER) 'E'WX ER) ! ((EL SH WY) ER 'E'WX)
* SH = B ! A ! Z ! S ! P       WJ -НОВЫЙ ИНДЕКС
* ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ ТИПА 7
SPLT7     (('B' EL) 'E'WX ER) WJ (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/
              (('E'WX) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                     ('E'WX) E1 .. () (E3)) E4 .)
              (('E'WX 'V'WX) K/VETKA/
                 (('V'WX 'W'WJ 'E'WX) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                    ('E'WX 'W'WJ 'E'WX) E1 .. () (E3)) E4 .).).
          ((EL 'B'WY) ER 'E'WX) WJ (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/
              (('E'WX) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                   ('E'WX) E1 .. () (E3)) E4 .)
              (('E'WX 'V' WX) K/VETKA/
                 (('V'WX 'E'WX 'W'WJ) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                    ('E'WX 'E'WX 'W'WJ) E1 .. () (E3)) E4 .).).
          (('A' EL) 'E'WX ER) WJ (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/
              (('E'WX) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                    ('E'WX) E1 .. () (E3)) E4 .)
              (('E'WX 'V'WX) K/VETKA/ (('V'WX 'W'WJ 'E'WX) K/VETKA/
                 (('W'WJ 'S'WJ) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                    ('E'WX 'S'WJ 'E'WX) E1 .. () (E3)) E4 .)
                 (('W'WJ 'P'('E'WJ)) 'F').).).
          ((EL 'A'WY) ER 'E'WX) WJ (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/
              (('E'WX) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                      ('E'WX) E1 .. () (E3)) E4 .)
              (('E'WX 'V'WX) K/VETKA/ (('V'WX 'E'WX 'W'WJ) K/VETKA/
                 (('W'WJ 'S'WJ) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                      ('E'WX 'E'WX 'S'WJ) E1 .. () (E3)) E4 .)
                 (('W'WJ 'P'('E'WJ)) 'F').).).
          (('Z'WY EL) 'E'WX ER) WJ (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/
              (('E'WX ) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                      ('E'WX) E1 .. () (E3)) E4 .)
              (('E' WX 'V'WX) K/VETKA/ (('V'WX 'W'WJ 'E'WX) K/VETKA/
                 (('W'WJ 'Z'WY) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                      ('E'WX 'Z'WY 'E'WX) E1 .. () (E3)) E4 .)
                 ('#'('W'WJ 'Z'WY) 'F').).).
          ((EL 'Z'WY) ER 'E'WX) WJ (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/
              (('E'WX) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                      ('E'WX) E1 .. () (E3)) E4 .)
              (('E'WX 'V'WX) K/VETKA/ (('V'WX 'E'WX 'W'WJ) K/VETKA/
                 (('W'WJ 'Z'WY) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                      ('E'WX 'E'WX 'Z'WY) E1 .. () (E3)) E4 .)
                 ('#'('W'WJ 'Z'WY) 'F').).).
          (('S'WY EL) 'E'WX ER) WJ (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/
              (('E'WX) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                      ('E'WX) E1 .. () (E3)) E4 .)
              (('E'WX 'V'WX) K/VETKA/ (('V'WX 'W'WJ 'E'WX) K/VETKA/
                 (('W'WJ 'S'WY) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                      ('E'WX 'S'WY 'E'WX) E1 .. () (E3)) E4 .)
                 ('#'('W'WJ 'S'WY) 'F').).).
          ((EL 'S'WY) ER 'E'WX) WJ (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/
              (('E'WX) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                      ('E'WX) E1 .. () (E3)) E4 .)
              (('E'WX 'V'WX) K/VETKA/ (('V'WX 'E'WX 'W'WJ) K/VETKA/
                 (('W'WJ 'S'WY) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                      ('E'WX 'E'WX 'S'WY) E1 .. () (E3)) E4 .)
                 ('#'('W'WJ 'S'WY) 'F').).).
          (('P' EL) 'E'WX ER) WJ (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/
              (('E'WX) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                      ('E'WX) E1.. () (E3)) E4 .)
              (('E'WX 'V'WX) K/VETKA/ (('V'WX 'W'WJ 'E'WX) K/VETKA/
                 (('W'WJ 'S'WJ) 'F')
                 (('W'WJ 'P'('E'WJ)) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                      ('E'WX 'P'('E'WJ) 'E'WX) E1.. () (E3)) E4.).).).
          ((EL 'P'WY) ER 'E'WX) WJ (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/
              (('E'WX) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                      ('E'WX) E1.. () (E3)) E4 .)
              (('E'WX 'V'WX) K/VETKA/ (('V'WX'E' WX 'W'WJ) K/VETKA/
                 (('W'WJ 'S'WJ) 'F')
                 (('W'WJ 'P'('E'WJ)) K/SPL41/ (K/TMR/ () () K/PRMRP/
                      ('E'WX 'E'WX 'P'('E'WJ)) E1.. () (E3)) E4.).).).
```

```
* K/SPLT8/ WA <СИСТЕМА> .
* WA = (() 'K'WX EL) ! (('D'WY) 'K'WX EL) ! ((SH WY EL) 'K'WX ER) !
*       ! ((EL SH WY) ER 'K'WX)
* SH = Z ! A ! B ! S ! P
* ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕПЛЕНИЯ ТИПА 8 .
SPLT8    WA ES = K/SPL81/ K/SPL82/ WA . ES .
SPL82    (() 'K'WX EL) = WX
         (('D'WY) 'K'WX EL) = WX
         (('C'WY ER) EL 'K'WX) = WX
         (('D'WY ER) EL 'K'WX) = WX
         ((ER) 'K'WX EL) = WX
SPL81    WX (E1 () (E3)) E4 = K/VETKA/ (('K'WX 'E'WX) K/SPL41/
               (K/TMR/ () () K/PRMRP/ ('K'WX 'E'WX) E1..
                () (E3)) E4.).
*
* K/VETKA/ <ДЕРЕВО> -> <ДЕРЕВО>
VETKA     = 'Ø'
         E1 (ED 'Ø') E2 = K/VETKA/ E1 E2 .
         (E1 'F') (E2 'F') = 'F'
         (E1 'F') = 'F'
         E1 = E1
         END

IEF142I - STEP WAS EXECUTED - COND CODE ØØØØ
XXASM     EXEC  PGM=IEUASM,REGION=80K,PARM=NOLIST,COND=(Ø,LT)          ØØØ
XXSYSLIB DD     DSNAME=SYS1.MACLIB,DISP=SHR                            ØØØ
XXSYSUT1 DD     DSNAME=&SYSUT1,UNIT=SYSDA,SPACE=(1700,(400,50))        ØØØ
XXSYSUT2 DD     DSNAME=&SYSUT2,UNIT=SYSDA,SPACE=(1700,(400,50))        ØØØ
XXSYSUT3 DD     DSNAME=&SYSUT3,SPACE=(1700,(400,50)),UNIT=SYSDA        ØØØ
XXSYSPRINT DD   SYSOUT=A                                               ØØØ
XXSYSPUNCH DD   UNIT=2314,VOL=SER=LAMBDA,DSN=LOAD(&M),DISP=OLD         ØØØ
IEF653I SUBSTITUTION JCL - UNIT=2314,VOL=SER=LAMBDA,DSN=LOAD(NDOPR),DISP=OL
XXSYSIN DD DSN=&&WORK,DISP=(OLD,DELETE)
IEF142I - STEP WAS EXECUTED - COND CODE ØØØØ
```